

ISSN: 2339-3270

Revista
INGENIERÍA, MATEMÁTICAS
Y CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN

PUBLICACIÓN DEL CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA CORPORACIÓN UNIVERSITARIA REPUBLICANA



VOLUMEN 1 - NÚMERO 2 - JULIO - DICIEMBRE DE 2014



Corporación Universitaria Republicana

Centro de Investigaciones

Fecha de publicación: julio de 2014

Revista de Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información, es una publicación del Centro de Investigaciones de la Corporación Universitaria Republicana - Bogotá, D.C.

Los artículos publicados en la revista pueden ser reproducidos total o parcialmente, citando la fuente y el autor.

Enfoque o perspectiva de análisis y contenido de los artículos son responsabilidad de los autores.

DIRECTIVOS
CORPORACIÓN UNIVERSITARIA REPUBLICANA

Presidenta del Consejo Superior : Diana Josefina Téllez Fandiño
Rector : Gustavo Adolfo Téllez Fandiño
Vicerrector : Gerardino Vivas Hernández
Vicerrector Académico : Alejandro Castillo Rivas
Jefe de Planeación : Juan Manuel Medina
Director del Centro de Investigaciones : Rodrigo Alberto Plazas Estepa
Decano Facultad de Derecho
y Ciencias Políticas : Iván Alfonso Cancino González
Decana Facultad de Contaduría : María Cecilia Galindo de Galindo
Decana Facultad de Trabajo Social : Jazmín Alvarado González
Decano Facultad de Finanzas
y Comercio Internacional : Tatiana Villarreal Cerquera
Decano Facultad de Ingenierías : Ramón María Cubaque Mendoza
Decano Facultad de Ciencias Básicas : Héctor Guillermo Sierra

EDITOR

Evelyn Garnica Estrada

COMITÉ EDITORIAL

Magdalena Pradilla Rueda
Tatiana Ferro Mojica
Alexander Bonilla Rivera
Nelly Paola Palma Vanegas
Raúl Manuel Falcón Ganfornina

COMITÉ CIENTÍFICO

Gustavo Adolfo Téllez Fandiño
Jesús Victorio Martín
Alffer Gustavo Hernández Posada
Ramón María Cubaque Mendoza

Publicación semestral
Número de ejemplares: 500
ISSN: 2339-3270

Información:

Centro de Investigaciones
Carrera. 7 No. 19-38 • PBX: 286 23 84 - Ext. 114

Armada digital e impresión:

Grafiweb Impresores Publicistas • Tel.: 6945017
grafiwebgerencia@gmail.com

COMITÉ EDITORIAL

Magdalena Pradilla Rueda

Ph.D Universidad de Paris I. Pantheon-Sorbonne. Faculté de Philosophie.
Ph.D Univeersidad Grenoble II Informatique et Mathematiques en Sciences Sociales.
Magister en Filosofía Universidad Javeriana.

Tatiana Ferro Mojica

Magister en Dirección y Gestión de Empresas Internacionales, Universidad Autónoma de Barcelona. Especialista en Gerencia Empresarial, Universidad Central.

Alexander Bonilla Rivera

Magister en Astrofísica, Universidad de Valparaíso, Chile. Licenciado en Física, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Nelly Paola Palma Vanegas

Doctora en Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia. Magister en Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.

Raúl Manuel Falcón Ganfornina

Doctor en Matemáticas, Universidad de Sevilla. Matemático de la Universidad de Sevilla.

COMITÉ CIENTÍFICO

Gustavo Adolfo Téllez Fandiño

Doctor en Derecho. Rector Corporación Universitaria Republicana.

Jesús Victorio Martín

Magister en Ingeniería de Software, Universidad de Alcalá. Ingeniero en Informática de Gestión, Universidad de Sevilla.

Alffer Gustavo Hernández Posada

Maestría en curso en Ciencias-Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia. Especialización en Matemáticas Avanzadas, Universidad del Tolima. Licenciado en Matemáticas, Universidad del Tolima. Especialista en Finanzas, Universidad de Ibagué, Universidad del Rosario.

Ramón Cubaque

Magister en Educación, Universidad Libre de Colombia. Especialista en Gerencia y Proyección Social de la Educación, Universidad Libre de Colombia.

PARES EVALUADORES

Darío Alejandro García

Magister en Matemáticas, Universidad de los Andes. Doctorando en Matemáticas, Universidad de los Andes.

Adriana Díaz

Magister en Docencia, Universidad de la Salle. Ingeniera Industrial, Universidad Libre de Colombia.

Guillermo Enrique Montes

Especialista en Auditoría de Sistemas, Universidad Antonio Nariño. Especialista en Gerencia de Producción, Universidad Antonio Nariño. Ingeniero Industrial, Universidad Incca de Colombia.

José Alejandro Franco Calderón

Especialista en Administración de Tecnologías de la Información para la Comunicación Virtual, Universidad Manuela Beltrán. Ingeniero Electrónico, Escuela Colombiana de ingeniería «Julio Garavito».

Isaías David Marín Gaviria

Estudiante de Maestría en Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia. Matemático, Universidad Nacional de Colombia.

Jhon Alexander Rico Franco

Especialista en Seguridad en Redes de la Universidad Católica de Colombia. Ingeniero de Sistemas de la Universidad Católica de Colombia.

Bricce Yesid Valencia Cruz

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia. Especialización en Matemática Aplicada, Universidad Sergio Arboleda.

PERFIL DE LA REVISTA

AFINES A INGENIERÍA DE SISTEMAS, INDUSTRIAL, MATEMÁTICAS Y CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN

Requisitos de Publicación

Las directivas de la Corporación Universitaria Republicana y el Centro de Investigaciones invitan a investigadores nacionales e internacionales a participar con sus artículos en las próximas publicaciones de la Revista de Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información.

Los artículos deben ser inéditos, productos de proyectos de investigación preferiblemente terminados; en temas relacionados con Ingeniería de Sistemas, Ingeniería Industrial, Matemáticas y Ciencias de la Información.

Para su recepción, evaluación y publicación los artículos deberán cumplir con lo siguiente:

1. Componentes:

1. Resumen en español.
2. Palabras clave.
3. Abstract.
4. Key words.
5. Introducción.
6. Problema de investigación.
7. Hipótesis de trabajo.
8. Estrategia metodológica.
9. Resultados.
10. Conclusiones.
11. Bibliografía.

2. Los artículos deberán tener un sustento bibliográfico. Las referencias bibliográficas tienen que hacerse de acuerdo con las normas nacionales e internacionales actualmente utilizadas en este tipo de publicaciones (ICONTEC-APA).

3. En la primera página se debe hacer la correspondiente referencia a pie de página sobre el autor y sus calidades académicas e investigativas. Igualmente señalar el proyecto de investigación del cual procede el artículo y la institución que financia dicho proyecto.

4. Extensión máxima de 20 páginas, presentación en Word. Papel carta, letra Arial 12 a espacio y medio.

La revista podrá publicar artículos que cumplan con los requisitos de forma y contenido, y que hayan sido evaluados favorablemente por árbitro o par académico externo.

Los artículos podrán remitirse en medio físico a la sede administrativa de la Corporación Universitaria Republicana, Centro de Investigaciones (Carrera 7° No. 19-39, Piso 4°. Teléfono 2862384 Ext. 114) o a los correos: rodrigoplazas@urepublicana.edu.co

CONTENIDO

	Pág.
Editorial	
<i>Evelyn Garnica Estrada</i>	11
Artículos de Investigación	
Caracterización de los procesos académicos del Sistema de Gestión de Calidad Académica <i>Ramón María Cubaque Mendoza, Mayra Lorena Rincón Ardila, Yury Natali Sotelo Cruz</i>	13
Álgebras de Banach y teoría espectral <i>Miguel Ángel Cabra Barrera</i>	25
Confiabilidad de medidas antropométricas en un grupo de estudiantes universitarias de Bogotá <i>Aldo Piñeda Geraldo</i>	35
Ergonomía ambiental: Iluminación y confort térmico en trabajadores de oficinas con pantalla de visualización de datos <i>Aldo Piñeda Geraldo, Guillermo Montes Paniza</i>	55
Innovación, tecnología y conocimiento “ingredientes para impulsar el desarrollo sostenible en el país” <i>Adriana Díaz</i>	79
El material concreto y el pensamiento geométrico: Una manera de construir el algoritmo de la multiplicación <i>John Edison Castaño Giraldo</i>	87
Alan Turing, su obra y los efectos sobre la calculabilidad <i>Magdalena Pradilla Rueda</i>	93
Sobre el infinito y sus dificultades antes de Georg Cantor y sus obras <i>Isaías David Marín Gaviria</i>	123

EDITORIAL

Desde la Corporación Universitaria Republicana, continuamos trabajando en el propósito de divulgar el conocimiento científico y tecnológico a través de este segundo número de la Revista de Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información, donde se evidencia el trabajo de docentes investigadores y estudiantes, bajo artículos de investigación, reflexión y revisión que sobresalen de las Facultades de Ingeniería y Ciencias Básicas.

En ese sentido, el trabajo de los investigadores queda consolidado en esta revista, que busca en cada número tener un impacto en el ámbito académico a través de la socialización de experiencias, iniciativas y proyectos, generando un efecto positivo en la sociedad actual, acorde a las políticas de nuestro Sistema Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación - SNCTI de Colombia.

Actualmente, la Corporación Universitaria Republicana asume los retos para los resultados de la investigación, que se plantea en las nuevas políticas de Colciencias referidas al modelo de reconocimiento y medición de grupos de investigación, desarrollo tecnológico o innovación, y de investigadores del sistema nacional de ciencia, tecnología e innovación, así como la nueva clasificación de revistas científicas, donde nuestra comunidad científica, autores y editores adoptan la cultura para asumir objetivos y metas de I+D+i con responsabilidad.

Con el compromiso de enfrentar los retos y consolidar cada vez más la Revista de Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información, como un medio de información y contribución en diversos campos del conocimiento, la presente edición cuenta con artículos que relacionan temáticas de los sistemas de gestión de calidad en la educación y la gestión pública, aportes de investigación en el campo de la antropometría y la ergonomía ambiental, aportes referentes al desarrollo sostenible del país con base a la innovación, tecnología y conocimiento, y desde el área de matemáticas se tiene un aporte sobre conjuntos infinitos y un artículo que presenta reflexiones sobre el pensamiento matemático en la enseñanza de las matemáticas.

Se espera con esta contribución, que el conocimiento siga trascendiendo fronteras y llegue a diversos lectores, estudiantes, docentes y demás actores

del conocimiento, para garantizar que los trabajos académicos visibles en este número cumplan con la estrategia de divulgación.

Evelyn Garnica Estrada
Docente - Investigadora

CARACTERIZACIÓN DE LOS PROCESOS ACADÉMICOS DEL SISTEMA DE GESTIÓN DE CALIDAD ACADÉMICA

RAMÓN MARÍA CUBAQUE MENDOZA*,
MAYRA LORENA RINCÓN ARDILA**,
YURY NATALI SOTELO CRUZ ***

Recibido: noviembre 28 de 2013 / Aceptado: abril 2 de 2014

RESUMEN

En el artículo 53 de la Ley 30 de 1992 se sustenta una de las bases principales que direcciona el quehacer de toda institución educativa, manifestando que la educación es un servicio público que tiene una función social estratégica y que por tanto debe ser prestado con el mejor nivel de calidad posible; además establece el conjunto de políticas, estrategias, procesos y organismos que constituyen el Sistema Nacional de Acreditación, cuyo principal objetivo es garantizar a la sociedad que las instituciones de educación, cumplen con los más altos estándares de calidad para realizar sus propósitos y objetivos.

El enfoque hacia el diseño de un Sistema de Gestión de Calidad Académica se desprende de la necesidad manifiesta de facilitar los procesos de análisis e interpretación de la información buscando el mejoramiento continuo de los procesos en el programa de Ingeniería Industrial de la Universidad Libre.

Este Sistema pretende dar garantía a la Calidad de la Educación, identificando las no conformidades en los procesos educativos para dar respuestas inmediatas, estandarizar y controlar los procesos, para lo cual se caracterizó con detalle el punto focal de la investigación como son los *Procesos Académicos*, a partir de la relación entre cada uno de los factores presentados por el Consejo Nacional de Acreditación Colombiano en los lineamientos para la acreditación de programas, y las normas ISO 9001:2008 y la NTC 5555:2004, con lo que se permite visualizar la condición estratégica que fundamenta el Sistema y dar cumplimiento al compromiso socio-formativo por parte de la institución.

Palabras clave: calidad educativa, estandarización, formación por competencias, procesos académicos.

* Ingeniero. Docente jornada completa, Facultad de Ingeniería, Universidad Libre - Sede Bogotá. Correo electrónico: ramon.cubaquem@unilibrebog.edu.co

** Universidad Libre, Bogotá D.C., Colombia. Correo electrónico: mayral.rincon@unilibrebog.edu.co

*** Universidad Libre, Bogotá D.C., Colombia. Correo electrónico: yuryn.soteloc@unilibrebog.edu.co

ABSTRACT

Article 53 of Act 30 of 1992 builds a foundation that addresses the main task of any educational institution, stating that education is a public service that has a strategic social function and therefore must be provided with the best possible quality, it also establishes a set of policies, strategies, processes and organizations are the National Accreditation System, whose main objective is to ensure that society education institutions, meet the highest standards of quality for their aims and objectives.

The approach to the design of a Quality Management System Academic follows from the clear need to facilitate the processes of analysis and interpretation of information seeking continuous improvement of processes in the Industrial Engineering program at the Free University.

This system aims to guarantee the Quality of Education, identifying non-conformities in the educational process to provide immediate answers, standardize and control processes, which was characterized in detail the focal point of research as are the academic, from the relationship between each of the factors presented by the Colombian National Accreditation Council on guidelines for program accreditation, and ISO 9001:2008 and 5555:2004 NTC thus to visualize the strategic condition underlying the system, and to fulfill the socio-educational commitment by the institution.

Keywords: academic process, educational quality, standardization, training competency.

INTRODUCCIÓN

Al dar una mirada a lo que ha sido la Educación Superior en Colombia y el nivel académico de cada uno de los programas que se presentan en las diferentes entidades educativas, la investigación del *Semillero Quality Académica* centra su punto focal en la alta calidad académica que la Universidad Libre ha desarrollado en su programa de Ingeniería Industrial en la Sede Principal y el cómo alcanza la acreditación y busca un mejoramiento continuo con el fin de re-acreditarse.

En este proceso de autoevaluación con fines de conservar la Acreditación de Alta Calidad, se han evidenciado espacios por fortalecer en cuanto al control y seguimiento del mantenimiento de la calidad, por tanto surge la pregunta: ¿Los parámetros de calidad educativa del Consejo Nacional de Acreditación al ser desarrollados como un sistema de gestión académica, garantizan la prestación del servicio educativo con alta calidad en el programa de Ingeniería Industrial de la Universidad Libre? El desarrollo de un Sistema de Gestión de la Calidad Académica que se asumió como una investigación evaluativa y exploratoria permitió diagnosticar objetivamente las fortalezas y los aspectos a mejorar del Programa de Ingeniería Industrial, de la Universidad Libre.

Con base al planteamiento anterior, se determinó la relación entre el enfoque por procesos establecido por la ISO 9001, la NTC 5555 y los lineamientos

planteados por el CNA, permitiendo un desarrollo sustentable del Sistema y el progreso de la investigación hacia el automejoramiento en los *Procesos Académicos*, buscando documentarlos y determinar su relevancia en el Sistema de Gestión de Calidad Académica como aporte diferencial a los procesos del Programa de Ingeniería Industrial, Universidad Libre, Sede Principal.

METODOLOGÍA

Tipo de investigación

Se estableció una metodología cualitativa de tipo descriptivo, basado en la necesidad de documentar el Sistema como lo exigen las normas de calidad.

Deductivo, que pasa de lo general a lo particular, de forma tal que partiendo de unos enunciados de carácter universal como las Normas de Calidad y el Modelo de Acreditación Colombiano, se infieren enunciados particulares, hipotético-deductivos, como la definición de procesos y procedimientos específicos para cada uno de ellos.

El diseño transversal lo requiere el sistema por la necesidad de tomar datos en un momento específico de tiempo que de fe de las cualidades de la calidad educativa, en las condiciones establecidas para una situación o contexto determinado.

RESULTADOS

A. Mapa de procesos

Factores jerarquizados

Factor estratégico: Aquel que proporciona directrices a todos los demás factores y es realizado por la dirección o por otras entidades.

- Misión y proyecto institucional

Factores claves o fundamentales: Son las actividades esenciales del servicio, su razón de ser.

- Estudiantes.
- Profesores.

- Procesos académicos.
- Egresados e impacto sobre el medio.

Factores de soporte o complementarios: Son los que realizan otros servicios y que ayudan a la hora de realizar los factores fundamentales o claves.

- Bienestar institucional.
- Organización, administración y gestión.
- Recursos físicos y financieros.

Procesos categorizados

Proceso para la gestión directiva: Establece mecanismos para asegurar la pertinencia de su oferta; define sus metas de largo, mediano y corto plazo.

- Factores estratégicos

Proceso para la gestión académica: Elementos pedagógicos y curriculares que definen los elementos pedagógicos y curriculares.

- Factores claves o fundamentales

Proceso para la gestión administrativa y financiera, y proceso para la gestión de la comunidad: Definición de Normas y Procedimientos para la utilización de los recursos, y participación con los distintos actores de la comunidad para promoción de convivencia y vinculación a su entorno.

- Factores de soporte o complementarios

Proceso de evaluación: Visto desde la gestión de Control, enfocado en los procesos y factores mencionados, cuyo objetivo está basado en el Aseguramiento de la Calidad con el fin de satisfacer a los usuarios y partes interesadas (ver figura 1).

B. Categorización de los procesos académicos (figura 2)

Formación integral por competencias

Abarca los aspectos fundamentales de toda institución educativa y los parámetros que complementa su quehacer institucional como guía y soporte de los planes y estrategias a ejecutar para garantizar la excelencia en la prestación del servicio.

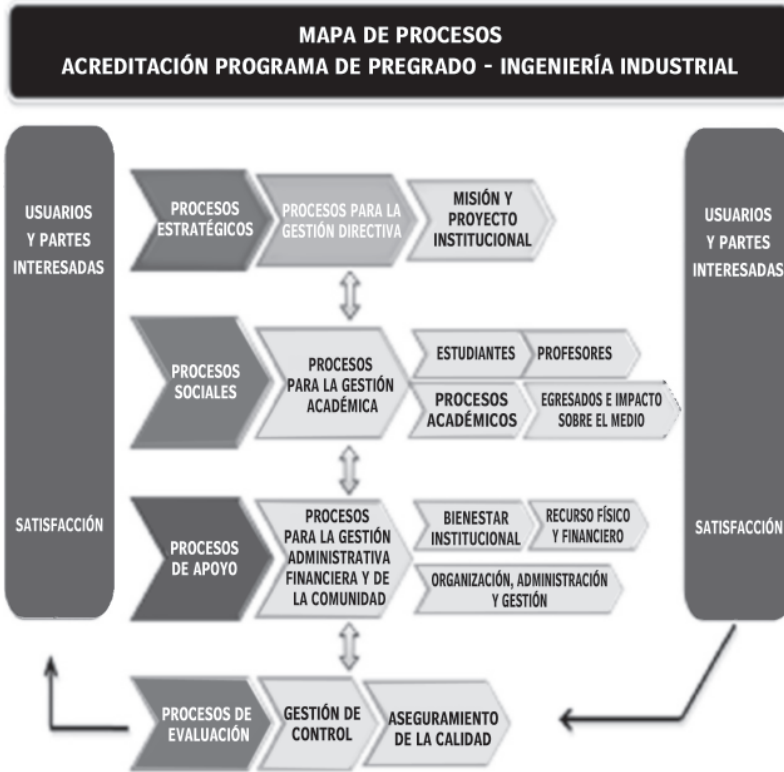


Figura 1. Mapa de procesos. Programa Ingeniería Industrial.



Figura 2. Categorización de los procesos académicos.

- Interdisciplinariedad.
- Flexibilidad del currículo.
- Integralidad del currículo.
- Sistemas de evaluación de estudiantes.
- Evaluación y autorregulación del programa.
- Trabajo de los estudiantes.
- Metodologías de enseñanza y aprendizaje.
- Relaciones nacionales e internacionales.

Investigación

Favorece la formación de un profesional con criterio investigativo y potencializa la indagación y el pensamiento autónomo y analítico del profesional.

- Formación para la investigación.
- Compromiso con la investigación.

Proyección social

Promueve el vínculo con la sociedad, su entorno en el proceso de actualización y aporte social desde la perspectiva académica y profesional como principio básico de la academia.

- Extensión o proyección social.

Medios de apoyo

Presenta la importancia de la gestión de los recursos y su disponibilidad para dar cumplimiento a los planes preestablecidos por la institución como garantía del desenvolvimiento libre y efectivo de las habilidades en el profesional.

- Recursos informáticos y de comunicación.
- Recursos bibliográficos.
- Recursos de apoyo docente.

C. Mapa de procesos específicos (figura 3)

En la definición del *mapa de procesos* se identificó la relación entre los ocho factores establecidos por el CNA y las especificaciones de la Norma NTC 5555, lo que permite establecer el desglose de los Macro Procesos según sus características en conjuntos que de acuerdo a su categoría, empiezan a formar los



Figura 3. Mapa de procesos específicos.

procesos específicos, reconociendo la transversalidad de cada proceso específico con todo el Sistema de Gestión de Calidad Académica.

Misión y Proyecto Institucional

En este proceso se explicita el compromiso institucional con la calidad y con los referentes universales de la educación superior, que orienta el proceso educativo, la administración y la gestión del programa.

- Proyecto Educativo Institucional.
- Proyecto Educativo del Programa.

Estudiantes

Proceso en el que se identifican los sistemas de gestión y evaluación para el ingreso, permanencia y formación integral que vincula a los estudiantes.

- Mecanismos de ingreso.
- Permanencia y deserción.
- Formación integral.
- Reglamento estudiantil.

Profesores

Proceso que representa la interacción directa de los estudiantes con la institución, determina los criterios de vinculación, desarrollo, formación y estímulos a la docencia.

- Selección y vinculación.
- Estatuto profesoral.
- Desarrollo profesoral.
- Estímulos en docencia.
- Interacción con comunidades.
- Remuneración por méritos.

Procesos académicos

En este proceso se reconoce la interdisciplinariedad, los contenidos curriculares y metodologías de enseñanza aplicadas, con un enfoque integral y flexible a los cambios del entorno profesional.

Formación integral por competencias: subdividida en las primeras tres.

- Currículo Integral por competencias.
- Relaciones Nacionales e Internacionales.
- Modelo Pedagógico.
- Compromiso con la integración.
- Proyección Social.
- Recursos académicos.

Egresados, e impacto sobre el medio

Proceso que permite retroalimentar constantemente el sistema, debido a su contacto directo con el campo profesional-laboral y amplía las opciones

para el desarrollo y seguimiento del impacto del programa y la institución en el medio.

- Influencia del programa.
- Seguimiento e impacto en el medio.

Bienestar institucional

Se presenta como el proceso de integración de la comunidad académica que responda a una política integral de bienestar universitario definida por la institución.

- Política, programas y servicios.

Organización, gestión y administración

Proceso que favorece el desarrollo y la articulación de las funciones de docencia, investigación, extensión o proyección social y la cooperación internacional.

- Dirección y gestión en el programa.
- Sistemas de comunicación.

Recursos físicos y financieros

En este proceso se identifican las características asociadas a los recursos, su adecuación y suficiencia según requerimiento, su funcionamiento e inversiones de sostenimiento.

- Administración de recursos.

D. Formación por competencias (figura 4)

El Sistema de Gestión de Calidad Académica pretende adoptar los conceptos de una formación por competencias donde incluye un planteamiento de un currículo flexible y propio de una acción integral de la educación que trabaje en conjunto a didáctica, la práctica y la evaluación como medio para el control y seguimientos de las actividades, basando esta formación en los tres saberes fundamentales que debe manejar un profesional integral con base a su campo de estudio.

- Saber conceptual: Teoría expuesta por medio de docentes, libros, tecnologías y medios de comunicación.



Figura 4. Definición de competencias.

- Saber procedimental: Aplicación del saber conceptual con base a la asignación de prácticas y trabajos de investigación.
- Saber axiológico: La ética y responsabilidad en la aplicación de los conceptos en el campo laboral y su desarrollo social.

La figura 4 nos presenta el modelo de competencias base del sistema, donde partimos de un plan por competencias estructurado con base en los tres saberes fundamento (conceptual, procedimental y axiológico), a través de los cuales se generarán evidencias y registros de actividades para evaluar el cumplimiento y efectividad de los planes establecidos hasta terminar en indicadores de gestión que nos permitan medir, analizar y retroalimentar el sistema con el fin de implementar las respectivas acciones de mantenimiento y mejora del sistema.

CONCLUSIONES

El diseño de un Sistema de Gestión de Calidad Académica da garantía de mantener los parámetros en alta calidad de acuerdo a los ocho factores estipulados por el Consejo Nacional de Acreditación de Programas.

El enfoque hacia los procesos académicos y la formación por competencias es pertinente con las tendencias nacionales e internacionales sobre la educación superior profesional del siglo XXI.

Proporciona el medio para la estandarización de los procesos en el programa de Industrial, el control y el seguimiento de los mismos.

Facilita el fluir de la información para la retroalimentación de los procesos para la mejora continua.

REFERENCIAS

Colombia. Ministerio de Educación Nacional (2006). Consejo Nacional de Acreditación (CNA). *Lineamientos para la Acreditación de Programas*. Bogotá D.C.

Guía Técnica Colombiana GTC-200 (2005). *Guía para la implementación de la Norma ISO 9001 en establecimientos de educación formal en los niveles de preescolar, básica, media y en establecimientos de educación no formal*. ICONTEC.

Instituto Colombiano de Normas Técnicas - ICONTEC (2007). *Sistemas de Gestión de Calidad para Instituciones de Formación para el Trabajo*. Bogotá D.C. P. 12. NTC 5555.

Ley 30 de 1992. Por la cual se organiza la Educación Superior.

Ley 115 de 1994. Ley General de Educación.

Norma Internacional ISO 9000, Sistemas de Gestión de Calidad, *Directrices para la mejora del desempeño*.

ÁLGEBRAS DE BANACH Y TEORÍA ESPECTRAL

MIGUEL ÁNGEL CABRA BARRERA*

Recibido: 14 de abril de 2014 / Aceptado: 12 de junio de 2014

RESUMEN

Luego de hacer una exposición de las nociones básicas de álgebras de Banach, se expone un teorema de teoría espectral.

Palabras clave: álgebras de Banach, elementos regulares, elementos singulares, divisores topológicos de cero, espectro.

ABSTRACT

In this paper, using elementary properties of the Banach algebras, we give a theorem classical of Spectral Theory.

Key words: banach algebras, regular elements, singular elements, topological divisors of zero, spectrum.

1. INTRODUCCIÓN

Durante las últimas décadas ha existido un gran interés en el estudio de las álgebras de Banach, una de las estructuras subyacentes del análisis funcional, en la cual relacionamos dos de los conceptos más fuertes de la matemática, los espacios de Banach y las álgebras. En este artículo estudiaremos en detalle sus definiciones y principales resultados. Al final nos daremos cuenta de la gran variedad de ideas matemáticas que entran en contacto para hacer posible esta bella teoría.

2. PRELIMINARES

Definición 2.1. *Un Álgebra es un espacio vectorial, donde sus vectores pueden ser multiplicados de la siguiente forma:*

- (1) $x(yz) = (xy)z$
- (2) $x(y+z) = xy+xz$ $(x+y)z = xz+yz.$
- (3) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$ para todo escalar α .

* Universidad Nacional de Colombia.

Diremos que un **Álgebra** es real o compleja, si el conjunto de escalares son los números reales o los números complejos.

Definición 2.2. Un **Álgebra Conmutativa** es un álgebra, en la que su estructura multiplicativa cumple:

$$(4) \quad xy = yx.$$

Definición 2.3. Un **Álgebra con identidad** es un álgebra, que tiene la siguiente propiedad: Existe un elemento diferente de cero en el álgebra, notado por 1 y llamado elemento identidad, tal que:

$$(5) \quad 1x = x1 = x \text{ para cada } x.$$

Ejemplo 2.4. Consideremos el espacio de funciones definidas con la suma $(f + g)x = f(x) + g(x)$ y la siguiente multiplicación, $(fg)x = f(x)g(x)$. Con estas operaciones el espacio de funciones es un álgebra con identidad, donde la identidad es la función constante definida por $1(x) = 1$ para todo x .

3. ÁLGEBRAS DE BANACH

Definición 3.1. Un **Álgebra de Banach** es un espacio de Banach complejo que también es un álgebra con identidad 1, y en donde la estructura multiplicativa está relacionada con la norma por:

$$(1) \quad \|xy\| \leq \|x\| \|y\|.$$

$$(2) \quad \|1\| = 1.$$

Proposición 3.2. La multiplicación en un Álgebra de Banach es continua.

Demostración. Supongamos que $x_n \rightarrow x$ y $y_n \rightarrow y$, veamos que $x_n y_n \rightarrow xy$.

$$\|x_n y_n - xy\| = \|x_n(y_n - y) + (x_n - x)y\| \leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\|.$$

La desigualdad anterior es una consecuencia directa de la desigualdad triangular. Además como X_n es convergente entonces esta acotada, es decir, $\|x_n\| \leq C$, donde C es un número positivo, luego podemos controlar $\|y_n - y\|$ tomando por ejemplo $\epsilon/2C$, pues y_n es convergente. Así mismo, podemos controlar $\|x_n - x\|$ (pues por hipótesis x_n es convergente), con lo que finalmente concluimos que $x_n y_n \rightarrow xy$.

Definición 3.3. Una *Subálgebra Banach* de un Álgebra de Banach A es una subálgebra cerrada de A que contiene la unidad.

Ejemplo 3.4. Sea B un espacio de Banach no trivial, entonces el conjunto $(\beta(B))$ de todos los operadores en B , es decir, lineales y continuos, es un álgebra de Banach. En clase mostramos que este espacio es un espacio de Banach, además es un álgebra con identidad, pues cumple también con los axiomas de espacio vectorial y el operador identidad $(I(x) = x)$ es continuo y lineal. Nos falta ver la estructura multiplicativa, es decir, veamos que i) $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$, y, ii) $\|I\| = 1$, donde T y S son operadores en $(\beta(B))$, I el operador identidad.

$$\begin{aligned} \|TS\| &= \sup \{ \|(TS)(x)\| : \|x\| \leq 1 \} = \sup \{ \|T(S(x))\| : \|x\| \leq 1 \} \\ &\leq \sup \{ \|T\| \|S(x)\| : \|x\| \leq 1 \} = \|T\| \sup \{ \|S(x)\| : \|x\| \leq 1 \} = \|T\| \|S\| : \\ \|I\| &= \sup \{ \|I(x)\| : \|x\| \leq 1 \} = \sup \{ \|x\| : \|x\| \leq 1 \} = 1: \end{aligned}$$

Así, $(\beta(B))$ es un álgebra de Banach.

Ejemplo 3.5. Si consideramos H un espacio de Hilbert, no trivial, entonces $\beta(H)$, es un álgebra de Banach.

Definición 3.6. Una subálgebra de $\beta(H)$, se denomina, *Autoadjunta*, si contiene el adjunto de cada operador definido en ella. Las subálgebras Banach de $(\beta(H))$, que son autoadjuntas se llaman, *C*-álgebras*.

Ejemplo 3.7. Consideremos $\zeta(X)$, el conjunto de todas las funciones complejas continuas y acotadas en un espacio topológico X . Si X tiene solo un punto, entonces $\zeta(X)$ puede ser identificado como un álgebra de Banach, es decir, el álgebra de los números complejos.

Ejemplo 3.8. Consideremos el disco unitario cerrado $D = \{ z : \|z\| \leq 1 \}$ en el plano complejo. El subconjunto $\zeta(D)$, de todas las funciones analíticas en el interior de D , es una subálgebra que contiene la identidad. Además el teorema de Morera de análisis complejo nos permite concluir que es cerrado y por tanto una subálgebra Banach de $\zeta(D)$.

El operador topología débil en $\beta(H)$, es la topología débil generada por todas las funciones de la forma $T \rightarrow (Tx, y)$, es decir, es la topología débil con la cual estas funciones resultan continuas. De acuerdo a esto tenemos la siguiente desigualdad

$$\|(Tx, y) - (T_0x, y)\| \leq \|T - T_0\| \|x\| \|y\|,$$

luego todo conjunto cerrado en esta topología, es cerrado en el sentido usual (Topología de la norma). Esta propiedad nos motiva a dar la siguiente definición.

Definición 3.9. Una C^* -álgebra, con la propiedad anterior, es llamada un *Álgebra de Von Neumann*.

3.1. Elementos regulares y singulares

Definición 4.1. Sea A un álgebra de Banach y x un elemento de A . Diremos que x es *Regular* en A , si existe un elemento y en A , tal que $xy = 1$ y $yx = 1$, denotaremos el conjunto de elementos regulares en A por G . Así mismo el complemento de G , lo notaremos por S , el conjunto de elementos *Singulares*.

De acuerdo a esta definición tenemos que G es distinto de vacío, pues 1 está en el conjunto. Además S también es no vacío, pues 0 es un elemento singular.

Proposición 4.2. Cada elemento x para el cual $\|x-1\| < 1$ es regular, y el inverso de tal elemento está dado por $x^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n$.

Demostración. Supongamos que $\|x-1\| = r$ es tal que $r < 1$, entonces

$$\|(1-x)^n\| \leq \|1-x\|^n = r^n,$$

con lo que las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n$, forman una sucesión de Cauchy en A . Como A es un álgebra de Banach, en particular es un espacio de Banach, luego esas sumas parciales convergen a un elemento de A , notemos este elemento por $y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n$, entonces la proposición 3.2, nos permite inferir

$$y - xy = (1-x)y = (1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n = y - 1,$$

Luego, $xy = 1$. Así mismo,

$$y - yr = y(1-r) = (1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n = y - 1,$$

Por tanto, x es un elemento regular de A .

Teorema 4.3. G es un conjunto abierto, y por tanto S es un conjunto cerrado.

Demostración. Veamos que dado $x_0 \in G$, existe un número real positivo r , tal que $S_r(x_0) \subseteq G$. Sea x un elemento de A tal que $x \in S_r(x_0)$, es decir, podemos elegir $r = \frac{1}{\|(x_0)^{-1}\|}$, tal que $\|x - x_0\| \leq \frac{1}{\|(x_0)^{-1}\|}$. ($(x_0)^{-1}$ existe, pues x_0 es un elemento de G , es decir, es regular). Por tanto

$$\|(x_0)^{-1}x - 1\| = \|(x_0)^{-1}(x - x_0)\| \leq \|(x_0)^{-1}\| \|x - x_0\|.$$

Luego, de acuerdo a la proposición anterior, $(x_0)^{-1}x \in G$. Además como $x = x_0((x_0)^{-1}x)$, tenemos que $x \in G$. Así G resulta un conjunto abierto.

Teorema 4.4. *La aplicación $x \rightarrow x^{-1}$ de G en G es continua y por tanto, es un homeomorfismo de G en sí mismo.*

Demostración. Sean x y x_0 elementos de G tal que $\|x - x_0\| \leq \frac{1}{(2\|(x_0)^{-1}\|)}$.

Como,

$$\|(x_0)^{-1}x - 1\| = \|(x_0)^{-1}(x - x_0)\| \leq \|(x_0)^{-1}\| \|x - x_0\| \leq \frac{1}{2}.$$

Entonces la proposición 4.2 nos garantiza que $(x_0)^{-1}x \in G$ y su inverso está dado por la fórmula;

$$(x)^{-1}x_0 = ((x_0)^{-1}x)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (x_0)^{-1}x)^n.$$

Por tanto,

$$\|(x)^{-1} - (x_0)^{-1}\| = \|((x)^{-1}x_0 - 1)(x_0)^{-1}\| \leq \|(x_0)^{-1}\| \|((x)^{-1}x_0 - 1)\| = \|(x_0)^{-1}\|,$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (x_0)^{-1}x)^n \right\| &\leq \|(x_0)^{-1}\| \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (x_0)^{-1}x)^n \right\|^n \\ &= \|(x_0)^{-1}\| \|(1 - (x_0)^{-1}x)\| \sum_{n=1}^{\infty} \|(1 - (x_0)^{-1}x)\|^n \\ &= \frac{\|(x_0)^{-1}\| \|1 - (x_0)^{-1}x\|}{1 - \|1 - (x_0)^{-1}x\|} \\ &< 2\|(x_0)^{-1}\| \|1 - (x_0)^{-1}x\| \leq 2\|(x_0)^{-1}\|^2 \|x - x_0\|. \end{aligned}$$

Corolario 4.5. *Si el espacio de Banach asociado a un álgebra de Banach A es localmente conexo entonces el álgebra de Banach A es localmente conexa.*

Demostración. En clase mostramos que todo espacio de Banach es localmente conexo, luego A es localmente conexo (pues A es un álgebra de Banach y las componentes del conjunto G son conjuntos abiertos).

Es importante resaltar, que cuando trabajamos con elementos regulares y singulares en un álgebra de Banach A , se debe tener cuidado al pasar a una subálgebra Banach A_1 , pues si consideramos un elemento x regular en el álgebra de Banach A es posible que cuando pasemos a una subálgebra A_1 en este proceso x pierda su inverso y se convierta en elemento singular. En la siguiente parte del proyecto estudiaremos las condiciones que hacen que un elemento sea regular o singular en cualquier subestructura de un álgebra de Banach.

3.2. Divisores topológicos de cero

Definición 4.6. *Un elemento z en un álgebra de Banach A es llamado un **Divisor topológico de cero** si existe una sucesión Z_n en A tal que $\|z_n\| = 1$ y $zz_n \rightarrow 0$ o $z_nz \rightarrow 0$. Notaremos el conjunto de los divisores topológicos de cero por W .*

Teorema 4.7. *Cada elemento z en un álgebra de Banach que sea divisor topológico de cero es singular.*

Demostración. Supongamos que z es un elemento de W , veamos que z está en S . Si z es un divisor topológico de cero, entonces $\|z_n\| = 1$ y $zz_n \rightarrow 0$ o $z_nz \rightarrow 0$. Razonemos por el absurdo, supongamos que z es un elemento de G , es decir, existe z^{-1} . De acuerdo a la proposición 3.2 la multiplicación es continua, entonces podemos escribir $z^{-1}(zz_n) = z_n \rightarrow 0$, pero esto contradice $\|z_n\| = 1$. Así mismo si ahora suponemos que $z_nz \rightarrow 0$, entonces podemos escribir $(z_nz)z^{-1} = z_n \rightarrow 0$, lo cual nuevamente contradice $\|z_n\| = 1$. Así en los dos casos obtenemos una contradicción, por tanto z es un elemento singular.

Teorema 4.8. *La frontera del conjunto S es un subconjunto de W .*

Demostración. De acuerdo a las proposiciones de las secciones anteriores, S es un conjunto cerrado. (Pues G es abierto y es el complemento de S). Por tanto la frontera de S , consiste de todos los puntos en S que son límites de sucesiones convergentes en G . Veamos entonces que si z es un elemento de S y existe una sucesión t_n en G tal que $t_n \rightarrow z$, entonces z es un elemento de W .

Como t_n esta en G , podemos escribir $t_n^{-1} z - 1 = t_n^{-1} (z - t_n)$ tal que t_n^{-1} no es acotada. Por otro lado

$$\| (t_n)^{-1} - 1 \| \leq 1$$

para algún n , luego $z = t_n((t_n)^{-1}z)$, podría ser regular. Como t_n^{-1} no es acotada, asumimos que $\| t_n^{-1} \|$. Si definimos $z_n = \frac{t_n^{-1}}{\|t_n^{-1}\|}$, entonces para $\| z_n \| = 1$ tenemos

$$z z_n = \frac{z t_n^{-1}}{\|t_n^{-1}\|} = \frac{1 + (z - t_n) t_n^{-1}}{\|t_n^{-1}\|} = \frac{1}{\|t_n^{-1}\|} + (z - t_n) z_n \rightarrow 0.$$

Así, existe una sucesión t_n en G tal que $t_n \rightarrow z$, entonces z es un elemento de W .

Estos dos últimos teoremas nos aseguran que los elementos topológicamente divisores de cero, son los elementos que conservan sus propiedades independiente de la subestructura de álgebra de Banach que trabajemos.

3.3. Teoría espectral

Definición 5. Sea x un elemento de un Álgebra de Banach A , definimos el espectro de x , por el siguiente subconjunto del plano complejo

$$\sigma(x) = \{ \lambda: x - \lambda 1 \text{ ES SINGULAR} \}$$

En la sección anterior mostramos que el conjunto de los elementos singulares es cerrado, por tanto el espectro de x es un conjunto cerrado. Así mismo consideramos el espectro de x como un subconjunto del plano complejo, en particular, tenemos que el espectro de x es un subconjunto del disco cerrado $\{ z : |z| \leq \| x \| \}$. En efecto, si, λ es un número complejo tal que $\lambda > \| x \|$, entonces $\| \frac{x}{\lambda} \| < 1$, luego $\| 1 - (1 - \frac{x}{\lambda}) \| < 1$, por tanto $1 - \frac{x}{\lambda}$ es regular y así $x - \lambda 1$ es regular.

Definición 6. Sea x un elemento de un álgebra de Banach A , definimos el conjunto resolvente de x , notado por $\rho(x)$, como el complemento de $\sigma(x)$.

Así mismo, definimos el resolvente de x , como una función con valores en A definida en $\rho(x)$ por

$$x(\lambda) = (x - \lambda 1)^{-1}.$$

Además el teorema 4.4, asegura que esta función es continua y como $x(\lambda) = \lambda^{-1} (\frac{x}{\lambda} - 1)^{-1}$ para $\lambda \neq 0$, entonces $x(\lambda) \rightarrow 0$ cuando $(\lambda) \rightarrow \infty$.

Proposición 7 (Ecuación resolvente). Si λ y μ pertenecen a $\rho(x)$, entonces

$$x(\lambda) - x(\mu) = (\lambda - \mu) x(\lambda) x(\mu)$$

Demostración. Si λ y μ pertenecen a $\rho(x)$, entonces

$$\begin{aligned} x(\lambda) &= x(\lambda)(x - \mu 1)x(\mu) \\ &= x(\lambda)(x - \lambda 1 + (\lambda - \mu)1)x(\mu) \\ &= (1 + (\lambda - \mu)x(\lambda))x(\mu) \\ &= x(\mu) + (\lambda - \mu)x(\lambda)x(\mu) \end{aligned}$$

Teorema 8. El espectro de x , es no-vacío.

Demostración. Sea f un funcional en A (es decir, un elemento del espacio dual A^*), definido por $f(\lambda) = f(x(\lambda))$. De acuerdo a la ecuación resolvente dada en la proposición anterior tenemos,

$$\frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} = f(x(\lambda) x(\mu)),$$

tomando el límite cuando $\lambda \rightarrow \mu$, obtenemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu} \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} = f(x(\mu)^2).$$

Por lo tanto $f(\lambda)$ tiene derivada en cada punto de $\rho(x)$ y

$$|f(\lambda)| \leq \|f\| \|x(\lambda)\|.$$

Razonemos por el absurdo, Supongamos que $\sigma(x)$ es vacío, y asumamos que $\rho(x)$ es el plano complejo entero. De acuerdo al teorema de Liouville tenemos que $f(\lambda) = 0$ para todo λ (Pues $f(\lambda) \rightarrow 0$ cuando $(\lambda) \rightarrow \infty$). Como f lo tomamos como un funcional arbitrario en A , entonces por corolario del teorema de Hahn-Banach tenemos que $x(\lambda) = 0$ para todo λ . Pero esto es imposible, pues ningún inverso puede ser 0 y por tanto $\sigma(x)$ no puede ser vacío.

BIBLIOGRAFÍA

1. Dixmier J. (1957). Les algébras d, opérateurs dans z , espace hilbertien (Algèbres de von Neumann). Paris: Gauthier-Villars.
2. Kakutani S, and GW Mackey. Ring and Lattice Characterizations of Complex Hilbert, Bull Amer Math Soc 1946;52:727-733.
3. Rickart CE. (1960). General Theory of Banach Algebras. Princenton, N.J.: Van Nostrand.
4. Simmons GF. Topology and Modern Analysis. McGraw - Hill. 1963, New York.

CONFIABILIDAD DE MEDIDAS ANTROPOMÉTRICAS EN UN GRUPO DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIAS DE BOGOTÁ¹

ALDO PIÑEDA GERALDO²

Recibido: mayo 21 de 2013 / Aceptado: julio 2 de 2014

RESUMEN

El presente estudio tuvo como objetivo evaluar la confiabilidad intra-observador de mediciones antropométricas en un grupo de estudiantes universitarias de Bogotá. Tomando en cuenta el problema, esta investigación abordó la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuál es el nivel de confiabilidad intra-observador de las medidas antropométricas en un grupo de estudiantes universitarias de la ciudad de Bogotá, Colombia?

Así mismo, se calculó el error técnico de medición y el porcentaje de las variables y se comparó el error técnico de medición con los límites de tolerancia recomendado. El método utilizado fue de corte estadístico-correlacional. La muestra estuvo compuesta por 30 jóvenes estudiantes todas del género femenino, seleccionadas por un muestreo aleatorio simple. Para la toma de las medidas se utilizaron instrumentos antropométricos calibrados. Por otra parte, se recomienda seguir un patrón internacional de las técnicas estandarizadas, calibrar los instrumentos de medición y se requiere ampliar los estudios antropométricos y unificar criterios para evaluar los niveles de confiabilidad en poblaciones de adultos jóvenes, para futuros estudios de la antropometría aplicada a la ergonomía, el diseño, biomecánica laboral, medicina del deporte, nutrición y antropología forense.

Palabras clave: confiabilidad, medidas, antropométricas, intra-observador, estudiantes, universitarias, Bogotá.

ABSTRACT

The present study aimed to assess the intra -observer reliability of anthropometric measurements in a group of university students in Bogota. Considering the problem, this research addressed the following research question: What is the level of intra-observer reliability of anthropometric measurements in a group of university students in the city of Bogota, Colombia?

- 1 Artículo de investigación. Este trabajo fue presentado en el XII Congreso de la Asociación Latinoamericana de Antropología Biológica (ALAB), realizado en San José, Costa Rica en noviembre de 2012.
- 2 Antropólogo Físico de la Escuela Nacional de Antropología e Historia de México, D.F. Posgrado en Ergonomía de la Universidad El Bosque. Especialista en Derecho Laboral de la Corporación Universitaria Republicana de Bogotá. Docente-Investigador de la Facultad de Ingeniería Industrial de la Corporación Universitaria Republicana de Bogotá, Colombia.

Also, we calculated the technical error of measurement and the percentage of variables and compared the technical error of measurement with recommended tolerance limits. The method used was cross - correlation statistic, the sample consisted of 30 young female students all selected by simple random sampling. For taking measures calibrated anthropometric instruments were used. Moreover, it is recommended to follow an international standard standardized techniques, calibrate measuring instruments and requires anthropometric studies extend and unify criteria for assessing reliability levels in young adult populations for future studies of anthropometry applied to ergonomics, design, labor biomechanics, sports medicine, nutrition and forensic anthropology.

Key words: reliability, measurements, anthropometric, intra-observer, students, university, Bogotá.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación, surge del interés por evaluar la confiabilidad de las medidas antropométricas de un grupo de estudiantes de Bogotá, Colombia. Asimismo, se determinó la precisión y exactitud de las evaluaciones (control de la calidad cuantitativa) a través del error técnico de medición. El impacto fue conocer la precisión de las herramientas metodológicas para la realización de las medidas, de modo que cuando sea aplicada en otros contextos, se tenga conocimiento de la confiabilidad de las medidas, sabiendo su grado de precisión; teniendo así un método técnico confiable y de bajo costo. La antropometría consiste en una serie de mediciones de técnicas sistematizadas que expresan cuantitativamente todas las dimensiones del cuerpo humano. A menudo la antropometría es vista como la herramienta tradicional y básica de la antropología biológica.

Los estudios de las medidas antropométricas se han incrementado en las últimas décadas, centrando su objetivo en el error de medición, origen y magnitud. Todo esto es producto de la preocupación de diversos expertos que consideran a la antropometría como una fuente de datos, ya que los reportes o resultados del error de medición en las magnitudes antropométricas son raramente informados.

Norton & Olds (2004), sostienen que el error de medición es un problema importante en la antropometría, debido a los siguientes aspectos: el movimiento de la persona y del medidor, la postura del sujeto, la precisión en la aplicación del instrumento de medida, el espesor diferencial de los tejidos y la localización correcta del punto anatómico referenciado. Pequeñas diferencias en la técnica de medición pueden resultar muy significativas y por lo tanto pueden alterar los resultados.

El desconocimiento de la confiabilidad de las medidas, hacen que los estudios antropométricos no sean lo suficientemente adecuados para determinar lo que estos pretenden (nutrición, composición corporal, ergonomía, deporte, etc.) de modo que solo podríamos hacerlo a través de métodos directos, tales como: los análisis químicos de cadáveres o de técnicas indirectas como la tomografía axial computarizada, determinación de la masa celular corporal usando K 40 y de otros que lamentablemente son de un alto costo y difícil acceso, incluso algunos conllevan un riesgo biológico para los usuarios (Deurenberg & Roubenoff, 2005).

Un reto para la antropometría es establecer el nivel de confiabilidad, de manera que haya conocimiento de la precisión, de las medidas y con base en estos resultados, estudios posteriores pueden permitir que los errores de medición sean minimizados a través de un entrenamiento y estandarización cruzada (inter-intra), procedimientos que permiten disminuir la variabilidad entre los antropometristas. Autores como Sánchez, 1987 & Pérez et al. (1990) coinciden en que la importancia de la antropometría es generalizar los procedimientos antropométricos en las diversas áreas de estudio como son: la medicina, la salud, el deporte, la ergonomía, la composición corporal y en la investigación nutricional (García & Rodríguez, 2003). Siendo así, es indispensable que los profesionales que utilizan estas técnicas hagan uso de mediciones confiables, ya que esto se puede volver un problema para estudios en poblaciones de jóvenes adultos. A través de estas medidas seleccionadas se pueden controlar algunas técnicas de medición y el manejo preciso de los datos, por las ventajas y el bajo costo que tiene este tipo de investigaciones. Tomando en cuenta la problemática planteada, el estudio abordó la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuál es el nivel de confiabilidad intra-observador de las medidas antropométricas en un grupo de estudiantes universitarias de Bogotá, Colombia?

Y como subpreguntas que complementan el estudio:

1. ¿Cuál fue el error técnico de medición que se presentó en las medidas antropométricas?
2. ¿Cuál es el error técnico del porcentaje del error técnico de las medidas antropométricas?
3. ¿Qué resultados arrojaron los métodos y las técnicas para estudiar la confiabilidad en las diferentes variables del presente estudio?

Teniendo en cuenta este planteamiento, el estudio trazó como objetivo general: Evaluar la confiabilidad intra-observador de las mediciones

antropométricas en un grupo de estudiantes universitarias de Bogotá, Colombia. Y como objetivos específicos:

- Calcular el error técnico de medición (ETM).
- Calcular el error técnico de medición del porcentaje de medición.
- Comparar el error técnico de medición con los límites de tolerancia permitidos.
- Evaluar la confiabilidad de las mediciones a través de técnicas estadísticas.

Una vez abordados estos temas y reiterando la importancia de la confiabilidad en las medidas, a continuación se hará una breve exposición acerca de su definición. En este sentido la confiabilidad se entiende como el grado en que una serie de mediciones dan resultados similares. Medidas independientes pero comparables del mismo fenómeno u objeto, producen resultados equivalentes (centrado sobre el valor verdadero). De acuerdo a este autor las características de una medición confiable son: estabilidad y equivalencia. La estabilidad es la obtención de los resultados similares mediante pruebas repetidas, mientras que la equivalencia se presenta cuando se obtienen resultados similares en la aplicación de los instrumentos por diferentes personas (Rodríguez, 1990).

Por otro lado la fiabilidad indica la capacidad de coincidencia de la medida observada, con la “verdadera” o realizada por un experto o “antropometrista con criterio” (aquella persona con experiencia que no comete errores sistemáticamente), también se conoce como error inter-observador. Por otro lado, la fiabilidad es el resultado de merecer confianza, porque es correcta o se ajusta a la realidad. El término también aplica a los instrumentos de medición y de acuerdo a su etimología, se puede afirmar que indica la condición de un instrumento de ser fiables, es decir, capaz de ofrecer en su empleo repetido, resultados ciertos y constantes (Sierra, 1991).

La precisión nos indica la consistencia de la medida realizada por un mismo observador, es conocido también como error intra-observador (Esparza, 1993). Es decir, la precisión es la capacidad de repetir una medición en un mismo sujeto con un mínimo de error. Así mismo, la fiabilidad y la precisión requieren de aparatos de medición apropiados, que sean precisos y se calibren antes de tomar las mediciones corporales. Se debe tener personal entrenado en las técnicas antropométricas, controles periódicos y frecuentes de la calidad de los aparatos como del personal que recolecta los datos antropométricos. Sin embargo, a veces se cumplen estos requisitos, pero la reproductibilidad de las

mediciones antropométricas es escasa ya que, los tres requisitos que intervienen en la medición son: instrumentos, medidor (observador) y sujeto, son fuente de error y la varianza de cada uno de ellos contribuyen a la varianza total de la medición (Pozo & Argente, 2000). Es importante notar que una medición válida siempre es confiable, pero no todas las mediciones confiables son siempre válidas, por ejemplo: para evaluar el peso en jóvenes adultos, se mide el peso de los estudiantes en una báscula que presenta una falla en su sistema de calibración, el cual conlleva a un error sistemático de 500 gramos más del peso real, el individuo puede ser medido en varias oportunidades por el mismo observador y el resultado similar (estabilidad), puede ser medido por varios observadores y el resultado será similar (equivalencia). Estas características indican que la medición es confiable, sin embargo la medición no es válida, porque aparecen los jóvenes con 500 gramos más de peso verdadero (Rodríguez).

ERROR TÉCNICO DE MEDICIÓN

El tratamiento estadístico correcto para valorar la calidad de la medida es el error técnico de medida. (ETM). El ETM, se aplica y utiliza para valorar series repetidas de diferentes variables antropométricas, realizadas por uno o varios antropometristas. Por lo tanto, el error técnico de medición (ETM) es igual a la raíz cuadrada de la suma de las diferencias al cuadrado, dividido de los pares estudiados (Esparza, 1993).

$$ETM = \sqrt{\frac{\sum D^2}{n}}$$

Donde:

D^2 = (d al cuadrado) es la diferencia entre la primera y la segunda medición.

\sum = es la suma de las diferencias de todas las medidas realizadas.

n = número de sujetos evaluados.

Para el cálculo del porcentaje de error técnico de medición es:

$$\% ETM = \frac{ETM \times 100}{X}$$

Donde:

ETM = error técnico de medición.

X = media de la variable.

En general se admite que un ETM (error técnico de medición) sea de un 5% para pliegues cutáneos y menor del 2 % para el resto de las medidas. Los límites de tolerancia para diferentes variables antropométricas quedan reflejados en la tabla 1 (Marfell-Jones, Ross como se cita en Esparza, 1993).

Tabla 1. Límites de tolerancia permitidos.

Peso	0.5 Kg.
Estatura	3 mm.
ALTURAS	
Acromial	2 mm.
Radial	2 mm.
Estidolidea	2 mm.
Dactilion	2 mm.
Trocanter	2 mm.
Espinal	2 mm.
Tibial	1-2 mm.
Estatura sentado	2 mm.
DIÁMETROS	
Biepicondileo del húmero	1 mm.
Biestiloideo	1-2 mm.
Bicondileo del fémur	1 mm.
Biacromial	1-2 mm.
Transverso tórax	2-3 mm.
A.P tórax	1-2 mm.
Biiliocrestal	1-2 mm.
PERÍMETROS	
Cefálico	1 mm.
Cuello	2 mm.
Brazo relajado	2 mm.
Brazo flexionado	2 mm.
Antebrazo	2 mm.
Muñeca	1 mm.
Muslo	1 mm.
Pierna	1 mm.
Tobillo	1 mm.
Tórax inspiración	1-2 %
Tórax espiración	1-2 %
Cintura	2-3 %
Abdomen	1 mm.
Pliegues cutáneos	5 %

Fuente: Esparza. 1993, p. 65.

VARIABILIDAD DE LA MEDICIÓN Y CONTROL DE CALIDAD

En los estudios que se utilizan los métodos antropométricos está implícita la presunción que cada esfuerzo es hecho para asegurar la confiabilidad y la precisión de las mediciones y la estandarización de la técnica. Se supone que las mediciones son realizadas por observadores entrenados (intra-observador). Esto es básico para obtener datos confiables, exactos y nos sirve para fortalecer la aplicación de los mismos desde una proyección comparativa. Igualmente, los datos confiables y exactos son un aspecto particularmente crítico en los estudios seriados de corta o larga duración, en los cuales la definición de cambios pequeños es necesaria y los errores técnicos de medición pueden enmascarar los verdaderos. Por lo tanto, es esencial el control de la calidad y un monitoreo del proceso de la medición (Malina, 2006). Este autor recomienda que para ser preciso en las mediciones antropométricas se deben tener las siguientes condiciones: manejar los principios de la anatomía, conocer y dominar los puntos anatómicos de referencias, estudiar cada medición, es decir, qué es lo que se está midiendo, qué información provee y en qué se puede aplicar; obtener instrucción de un experto en antropometría; incluir la consistencia intra-observador (confiabilidad) e inter-observador (objetividad). Es importante mencionar que las personas que registran información estén instruidas de los procedimientos y de las técnicas de medición. Por lo anterior, se debe monitorear la posición del individuo y reconocer valores equivocadamente altos o bajos; constatar que se tomen todas las mediciones correspondientes a un protocolo específico, independientemente de que los procedimientos antropométricos estén estandarizados y sean fáciles de utilizar estando en manos de antropometristas, siendo esta una preocupación, la variación relacionada con el proceso de medición. La variabilidad en un mismo sujeto es de interés específico. Esto se debe a la variación en las mediciones (imprecisión) y a la variación fisiológica (falta de confiabilidad) (Malina, 2006). El mismo autor nos dice que el error es la diferencia entre el valor medido y su verdadera cantidad. Los errores de medición pueden ocurrir al azar o ser constantes. El error al azar es un aspecto normal de la antropometría y resulta de la variación en la técnica de medición que existe entre el sujeto y entre los individuos, o los problemas con los instrumentos de medición (calibración o la variación de la manufactura del aparato), o el error en el registro (transposición de los números). El error al azar no es direccional, ya esto puede estar por encima o por debajo de la dimensión verdadera. En los estudios de poblaciones, los errores al azar tienden a cancelarse entre sí y generalmente no representa un problema. Por otro lado, el error sistemático resulta de la tendencia de un técnico o de un instrumento de medición (por ejemplo: el calibrador para pliegues subcutáneos o una báscula inapropiada calibrada) que lleva a medir efectivamente de más o menos, una dimensión particular. Dicho error es direccional e introduce

desvíos del proceso de medición. En este sentido, la imprecisión que se produce dentro de un mismo individuo se estima tomando las dimensiones por duplicado, en el mismo sujeto por parte del medidor. La réplica de las medidas se toma independientemente, ya sea por el mismo medidor después que haya pasado un periodo de tiempo corto (error técnico por el mismo medidor), o por dos medidores diferentes (error técnico entre medidores). El error técnico de medición es una medida ampliamente usada para la replicación y se define de la siguiente manera: la raíz cuadrada de la suma de las diferencias al cuadrado de las mediciones replicadas, divididas por el doble de la cantidad de mediciones pares por ejemplo; la variancia dentro del mismo sujeto (Malina, 2006).

MARCO METODOLÓGICO

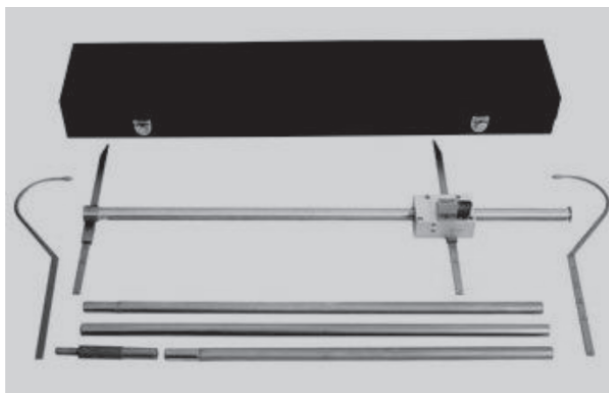
De acuerdo con la taxonomía institucional el estudio fue descriptivo, en tanto que pretendió calcular la confiabilidad de las medidas en un grupo de estudiantes universitarias. Con estos objetivos se trabajó para lograr la confiabilidad y las técnicas apropiadas de las medidas antropométricas. El proyecto se fundamentó en una investigación de corte estadístico-correlacional. La muestra estuvo compuesta por 30 jóvenes, seleccionados por medio de un muestreo aleatorio simple (MAS) de las estudiantes de la ciudad de Bogotá. Todas fueron del género femenino, entre 18 y 25 años, no se incluyeron las personas que tenían alguna patología o embarazadas, se excluyó aquellas que estuvieran por fuera del rango de edad determinado. Para la investigación, fue necesaria una serie de instrumentos que permitieron medir adecuadamente las variables de interés; siempre que sea posible, estos fueron calibrados.

Instrumentos de medición utilizados:

Un antropómetro, con las siguientes características: con cuatro segmentos y mide 2100 mm. Tiene un cursor deslizante y normalmente puede extenderse con dos escalas de medición que permiten determinar las dimensiones corporales verticales, como por ejemplo: la estatura.

Báscula. Se utilizó una báscula digital de vidrio, marca Mic Health con una precisión de graduación de 100 gramos. El alcance máximo del peso es de 150 kilogramos. La báscula trabaja con dos pilas de litio y mide 32.5 mm.

Cinta métrica. Una cinta métrica metálica con un largo de 200 mm. Se recomienda que tenga la escala métrica en unidades estandarizadas. Debe reunir las siguientes características: la cinta debe ser metálica para que no pierda elasticidad, si se utiliza una cinta de otro material, se debe revisar frecuentemente



Antropómetro.



Báscula digital.

para asegurarse que no ha perdido su longitud original. La cinta no debe tener más de siete milímetros de anchura, para que tenga una adecuada flexibilidad y de fácil manejo en la toma de circunferencias. Para leer sin dificultad, esta debe estar calibrada en unidades métricas que indiquen visiblemente los centímetros o milímetros (no es conveniente que la cinta tenga indicaciones en escalas métrica e inglesa por el mismo lado, pues induce a confusión). Debe tener un espacio en blanco antes del cero para facilitar su manipulación. No debe tener muelles o dispositivos similares dirigidos a ejercer una presión constante. Debe ser exacta, y comprobarlo antes de hacer las mediciones. Algunas cintas tienen una muesca para que pueda pasarse fácilmente y un borde recto con una franja de colores en contraste, que le da una clara interface en la marca del cero para que no tenga dificultades de lectura en el extremo (Marfell-Jones & Ross, 1982).



Cinta métrica metálica.

Calibrador de Pliegues Cutáneos. Un calibrador de pliegues cutáneos, es un instrumento que mide el grosor de unos dobles de piel con su consiguiente capa interna de grasa. En las diferentes investigaciones se ha demostrado que es de gran utilidad para estimar el porcentaje total de grasa corporal. Existen diferentes marcas y modelos de calibradores o como también suele llamarse plicómetros. Hay calibradores de metal con abertura de 60 milímetros y con precisión de un milímetro. Tenemos otros que consideran el estándar de oro que la mayoría de los investigadores utilizan para aplicar las ecuaciones que estiman el porcentaje de grasa. Con una apertura de 80 milímetros y una precisión de 0.2 mm. Otros calibradores son precisos y exactos con acabados de alta calidad, con un grado de exactitud y apertura de 50 milímetros, con una precisión de 0.2 mm. El calibrador diseñado por el Dr. Andrew S. Jackson, coautor de la ecuación Jakson-Pollock, es el de mayor apertura 100 mm, es el ideal para evaluar obesos de segundo y tercer grado, con una precisión de 1.0 mm.

Existen otros modelos como el medidor marca Lange, es el más sencillo para estimar la grasa corporal. Una constante tensión permite medir el espesor de los pliegues superficiales, proporcionando con rapidez el porcentaje de la grasa. Este aparato, está certificado por los gimnasios, entrenadores, pediatras, nutricionistas y por que no, los antropólogos. Las características del calibrador son las siguientes: tiene un rango de medición de 0 a 60 milímetros, con una graduación de 0,3 mm, y una presión constante de 10 gr/mm². (www.agevital.com/salud/aparatos.htm), se puede apreciar el calibrador de pliegues cutáneos Whitehouse Skinfold Caliper, marca Holtain Tanner. Este instrumento se diseñó para medir con más precisión los pliegues cutáneos. Fue desarrollado y diseñado en colaboración con la Universidad de Londres y el Instituto de Salud de Niños. Las características del aparato

son las siguientes: el rango de medida es de 0 a 48 mm, tiene una presión constante de 10 gr/mm², con un peso de 4 kgs, y una graduación de 0.2 mm. Aunque la precisión es alta, es necesaria una adecuada técnica de medición.

El calibrador SKINEX I, es más sofisticado ya que tiene una computadora incluida y calcula directamente el porcentaje de grasa corporal en la pantalla digital LCD, así elimina la necesidad de agregar las lecturas del pliegue cutáneo y el cómputo de las fórmulas o tablas de referencias. Es muy práctico para aquellos investigadores que trabajan en poblaciones numerosas y esto reduce las posibilidades de error. El calibrador tiene las fórmulas de Durnin, Jakson-Pollok & Slaughter-Lohman (Crugall, s.f.). Calibrador de ramas largas. Un compás de ramas rectas largas, con un rango de medida de 0-700 mm. Calibrador de ramas cortas. Un compás de ramas rectas cortas, con un rango de medida de 0-100 mm.

Ficha Antropométrica. Se diseñó una ficha antropométrica de acuerdo con los objetivos planteados, ya que permite recolectar y organizar los datos de cada sujeto evaluado para su sistematización y análisis computacional.



Calibrador de pliegues cutáneos.

PROCEDIMIENTO

Los procedimientos para la realización del estudio fueron: selección de la muestra de estudiantes. Para acceder a la muestra se solicitó las respectivas autorizaciones del Centro de Investigaciones y de la Coordinación académica de la Universidad. Un segundo paso fue el diseño de una programación de

fechas, hora de la evaluación y el número de estudiantes que participaron en la toma de los datos. Para esto, se realizó un recorrido por las aulas previa autorización de los docentes y se explicó a los estudiantes sobre el proyecto a desarrollar.

Las mediciones fueron realizadas por un antropometrista con experiencia (intra-observador). Se realizó una primera evaluación y después de aproximadamente cinco minutos se hizo una segunda. A los participantes, se les informó sobre qué mediciones se tomarían. Para la realización y desarrollo del estudio se requirió de un espacio adecuado con privacidad, limpio, amplio, estar aislado del ruido, buena iluminación para la lectura de los instrumentos y datos. Se procedió a medir a la estudiante de acuerdo a las siguientes condiciones: llevar un mínimo de ropa, la superficie del piso o asiento debía ser plana y horizontal. Los puntos anatómicos de referencias se deben identificar con mucho cuidado y marcarse con un lápiz dermatográfico, para posteriormente pasar a realizar las mediciones, tratando de efectuar una secuencia de arriba hacia abajo. Para el criterio de las medidas del cuerpo existen discreciones, algunas escuelas las toman de ambos lados del cuerpo. En nuestro caso se tomaron del lado derecho. Al tomar las medidas de anchura, se procura que las puntas no presionen la piel sino simplemente apoyar sobre ella. Para los perímetros, la cinta métrica debe colocarse perpendicularmente al eje del segmento sobre el cual se opera y sin ejercer presión. La mayoría de las medidas se toman estando de pie y en un estado de relajamiento, así mismo para la estatura en posición sentada, deberá ser en una postura sedente. Por otra parte, para evitar errores deberán tomarse las medidas en una misma unidad, preferiblemente en milímetros. Generalmente se toman con dos personas, una toma las mediciones y la otra escribe los datos que se van recopilando. El antropómetro se debe colocar perpendicularmente sin inclinaciones, ya que esto puede causar errores de observación de la medida hasta un margen de 0.5 mm (Comas, 1983).

RESULTADOS

El análisis se realizó a través de las siguientes medidas estadísticas descriptivas: media, desviación estándar, valores máximo y mínimo. Así mismo, la correlación de las variables antropométricas. Se evaluaron 17 variables (mediciones), en dos momentos diferentes para corroborar diferencias. Se evaluaron 30 estudiantes todas del género femenino. El promedio de edad fue de 20 años, con una desviación estándar de 2.61; el máximo de edad fue de 30 y mínimo 18 años. Las medidas antropométricas utilizadas que son idóneas para evaluar confiabilidad y calcular el error técnico de medición fueron: El peso, el cual alcanzó un promedio de 55.6 kilogramos, la desviación estándar 56.74, y

el máximo 67.3 y mínimo 44.5 kilogramos. La estatura nos dio un promedio de 1579 milímetros, con una desviación estándar de 56.74, un máximo de 1699 y un mínimo de la estatura de 1480 milímetros. La estatura sentada arrojó un promedio de 873 mm, con una desviación estándar de 33.1 y un máximo de 900 y mínimo de 781 mm. El peso y la estatura, variables que en combinación nos dan el índice de masa corporal aplicable para evaluar aspectos nutricionales y de calidad de vida como obesidad o bajo peso, La población se encuentra en el promedio y no entramos a profundizar pues el objetivo fue estudiar el error técnico de medición.

Diámetros: Biacromial se encontró como promedio 359 mm, y una desviación estándar de 12.18 y con una máximo de 390 y mínimo 340 mm. El diámetro del codo (húmero), nos dio un promedio de 56 mm, con una desviación estándar de 3.09 y un máximo de 62 y mínimo de 50 mm. Finalmente, del diámetro del fémur obtuvimos un promedio de 87 mm con una desviación estándar de 7.19 y con un máximo de 100 y un mínimo de 66 mm. Los diámetros permiten conocer la estructura ósea y la masa ósea, para estudios de la composición corporal, ergonómicos, de medicina del deporte, biomecánica entre otros.

Perímetros: en el perímetro del brazo relajado se obtuvo un promedio de 267 mm., con una desviación estándar de 20.52 y una máxima de la circunferencia de 310 y una mínima de 240 mm. En cuanto al perímetro de la cintura el promedio es de 707 mm, con una desviación estándar de 55.13 y un máximo de 840 y un mínimo de 614 mm. El perímetro del muslo fue de un promedio de 526 mm, con una desviación estándar de 27.30 y con un máximo de 595 y un mínimo de 480 mm. Por último, el perímetro de la pantorrilla suministró un promedio de 341 mm, con una desviación estándar de 20.19 y un máximo de 388 y un mínimo de 310 mm.

Por último están los *panículos adiposos subcutáneos* en el siguiente orden: pliegue de pantorrilla con un promedio de 16 mm, una desviación estándar de 4.16 y un máximo de 25 mm y un mínimo de 10 mm. El pliegue subescapular fue de un promedio de 17 mm, con una desviación estándar de 5.34 y un máximo de 33 mm y un mínimo de 10 mm. Otra medida fue el pliegue tricípital con un promedio de 22 mm, con una desviación estándar de 5.73 y con un máximo de 36 mm y un mínimo de 12 mm. El pliegue abdominal fue de 25 mm, con una desviación estándar de 5.79 y un máximo de 36 mm. y un mínimo de 15 mm. Para finalizar tenemos el pliegue del muslo, que nos dio un promedio de 27 mm, con una desviación estándar de 6.44 y un máximo de 38 mm y un mínimo de 14 mm. Los pliegues nos ayudan a determinan el porcentaje de grasa en los individuos siendo esta variable de importancia para determinar la obesidad y los riesgos asociados a ella. En

cuanto al cálculo del error técnico de medición y el porcentaje del error técnico de medición se encontraron los siguientes resultados: el peso dio un error técnico de 0.01 y un porcentaje de 0.0%. La estatura 0.38 y un porcentaje de 0.0%, estatura sentada 0.47 y un porcentaje de 0.1%.

De otra parte, como primera medida de confiabilidad, se calcularon las correlaciones entre las mediciones en el primer y el segundo momento. El resultado de esta correlación puede observarse en la tabla 2.

Tabla 2. Correlaciones entre el primer y segundo momento.

Par	Mediciones (Variables)	N	Correlación	Sig.
Par 1	Peso 1 y peso 2	30	1	.00
Par 2	Estatura 1 y estatura 2	30	1	.00
Par 3	Estatura sentada 1 y estatura sentada 2	30	1	.00
Par 4	Diámetro biacromial 1 y diám. biacromial 2	30	.997	.00
Par 5	Perímetro brazo 1 y perímetro brazo 2	30	.998	.00
Par 6	Perímetro cintura 1 y perím. cintura 2	30	.999	.00
Par 7	Perímetro muslo 1 y perím. muslo 2	30	.999	.00
Par 8	Perímetro pantorrilla 1 y perím. pantorrilla 2	30	.999	.00
Par 9	Pliegue tricipital 1 y plieg. tricipital. 2	30	.999	.00
Par 10	Pliegue subescapular 1 y plieg. subescap. 2	30	.999	.00
Par 11	Pliegue supraíliaco 1 y plieg. supraíl. 2	30	.998	.00
Par 12	Pliegue abdominal 1 y plieg. abdomi. 2	30	.998	.00
Par 13	Pliegue muslo 1 y plieg. muslo 2	30	.999	.00
Par 14	Pliegue pantorrilla 1 y plieg. pantorrilla 2	30	.997	.00
Par 15	Diámetro codo 1 y diám. codo 2	30	.911	.00
Par 16	Diámetro rodilla 1 y diám. rodilla 2	30	.993	.00
Par 17	Diámetro tobillo 1 y diám. tobillo 2	30	.981	.00

Fuente: trabajo de campo.

Al analizar bajo la correlación de Pearson, se observa que las mediciones fueron altamente confiables, puesto que se debe superar el umbral de 0.7; y en este caso se llegaron a correlaciones muy cercanas a 1. Especialmente en el caso del peso y la estatura se obtuvieron correlaciones perfectas, de modo que estas mediciones son altamente confiables. Probablemente este resultado se deba a que estas medidas son más fáciles de tomar frente a las otras, y la correcta calibración de los instrumentos. La correlación más baja encontrada fue la del diámetro del codo (0.911) posiblemente esto se deba a cambios en el ángulo del brazo y el antebrazo al momento de tomar la medición.

De otra parte, con el fin de observar si existen diferencias significativas entre estas mediciones, se llevó a cabo una *prueba T de student* para datos relacionados. El resultado de esta prueba, para cada uno de los pares de mediciones, se puede observar en la tabla 3.

Tabla 3. Diferencias significativas.

Medida	Media	Desviación	Error	Inferior	Superior	T	Gl	Sig.
Peso 1 - peso 2	-.0267	.1596	.0291	-.0863	.0329	-.915	29	.368
Estatura 1 - estatura 2	-.100	.885	.162	-.430	.230	-.619	29	.541
Estatura sentado 1 - estatura sentado 2	.133	.973	.178	-.230	.497	.750	29	.459
Diámetro biacromial 1 - diám. biacromial 2	-.200	.997	.182	-.572	.172	-1.099	29	.281
Perímetro brazo 1 - perímetro brazo 2	.900	1.296	.237	.416	1.384	3.804	29	.001
Perímetro cintura 1 - perímetro cintura 2	.467	2.968	.542	-.642	1.575	.861	29	.396
Perímetro muslo 1 - perímetro muslo 2	-.600	1.192	.218	-1.045	-.155	-2.757	29	.010
Perímetro pantorrilla 1 - perímetro pant. 2	.300	.877	.160	-.027	.627	1.874	29	.071
Pliegue tricipital 1 - pliegue tricipital 2	-.0733	.2599	.0474	-.1704	.0237	-1.546	29	.133
Pliegue subescapular 1 - pliegue subescapular 2	-.0933	.2766	.0505	-.1966	.0099	-1.848	29	.075
Pliegue suprailíaco 1 - pliegue suprailíaco 2	-.2267	.3591	.0656	-.3607	-.0926	-3.458	29	.002
Pliegue abdominal 1 - pliegue abdominal 2	.1200	.4055	.0740	-.0314	.2714	1.621	29	.116
Pliegue muslo 1 - pliegue muslo 2	-.1400	.3756	.0686	-.2803	.0003	-2.041	29	.050
Pliegue pantorrilla 1 - pliegue pantorrilla 2	-.060	.3645	.0665	-.1961	.0761	-.902	29	.375
Diámetro codo 1 - diam. codo 2	-.033	1.273	.232	-.509	.442	-.143	29	.887
Diámetro fémur 1 - diam. fémur 2 (rodillas)	.267	.868	.159	-.058	.591	1.682	29	.103
Diámetro tobillo 1 - diam. tobillo 2	-.267	.640	.117	-.506	-.028	-2.283	29	.030

Fuente: trabajo de campo.

De acuerdo con la prueba estadística, se pueden señalar diferencias significativas ($p < 0.05$) entre las mediciones del primer y segundo momento para las variables: perímetro brazo, pliegue suprailíaco, pliegue del muslo y el diámetro del tobillo. Para las variables de los pliegues suprailíaco y muslo, las diferencias significativas pueden atribuirse a variaciones en el grosor de la piel y entre la variabilidad de las personas. Así mismo, la localización del pliegue, el tamaño del mismo (posición de los dedos), la orientación (ángulos), lectura de los resultados de dos a tres segundos, posicionamiento del calibrador (perpendicular) y el momento de la medición, en el que el sujeto no debe hacer ejercicio ni estar deshidratado. Otro factor es que en esta zona existe mayor tensión muscular y es difícil de separar el pliegue.

ERROR TÉCNICO DE MEDICIÓN

Por último, se calculó el error técnico de medición, el cual al ser comparado con los límites permisibles, se puede señalar que las mediciones tomadas son de alta confiabilidad. En la tabla 4, se pueden observar estos datos:

Tabla 4. Error técnico de medición intra-observador y tolerancia de medidas.

No.	Medida	ETM	Porcentaje ETM	Límite de confiabilidad	
				Kgs/mm	Porcentaje Correlación
1	Peso	0.01	0.0	0.5	1.
2	Estatuta	0.38	0.0	3	1
3	Estat. sentada	0.47	0.1	2	1.
4	Diám. Biacromial	0.50	0.1	2	.997
5	Diám. Codo	0.78	1.4	1	1
6	Diám. Fémur	0.40	0.5	1	.993
7	Perím. Braz Relaj	1.22	0.5	2	1-2
8	Perím. Cintura	4.37	0.6		.999
9	Perím. del muslo	0.87	0.2	1-2	1 a 2
10	Perím. pantorrilla	0.42	0.1	1	.999
11	Plieg. pantorrilla	0.07	0.4	1	5
12	Plieg. Subescapu	0.04	0.2	1	5
13	Plieg. tricipital	0.04	0.2	1	5
14	Plieg. abdominal	0.09	0.3	2	5
15	Plieg Muslo	0.08	0.3	1.5	5

Fuente: trabajo de campo.

Anchuras: Anchura biacromial ETM 0.50 y un porcentaje del ETM de 0.1. El diámetro del codo fue de 0.78 y un porcentaje de 1.4. El diámetro del fémur dio 0.40 y el porcentaje de 0.5. *Perímetros:* En el perímetro del brazo relajado obtuvimos un ETM de 1.22 y un porcentaje de 0.5. En cuanto al perímetro de la cintura, 4.73 y un porcentaje de 0.6. El perímetro del muslo fue de un ETM de 0.87 y un porcentaje de 0.2. Por último, el perímetro de la pantorrilla suministró un resultado de 0.42 y un porcentaje de 0.1

Los panículos adiposos subcutáneos están en este orden: pliegue de pantorrilla con un ETM de 0.07 y con un porcentaje de 0.4. El pliegue subescapular dio un error de 0.04 y un porcentaje de 0.2. Otra medida fue el pliegue tricpital con un 0.04 y 0.2 de porcentaje. El pliegue abdominal fue de 0.09 con un porcentaje de 0.3. Para finalizar tenemos el pliegue del muslo, que dio un ETM de 0.08 con un porcentaje del ETM de 0.3.

DISCUSIÓN

Este estudio se propuso evaluar la confiabilidad intra-observador de las mediciones antropométricas en la muestra de 30 estudiantes, los resultados muestran que las variables de las medidas antropométricas permitieron una alta confiabilidad entre el error técnico de medición intra-observador y el porcentaje de medición, comparado con las medidas de tolerancia utilizadas en dicha validación por algunos autores reconocidos; estos nos arrojaron los siguientes resultados: El peso expresado en kilogramos arrojó un error mínimo de 100 gramos, contra el límite de tolerancia que es de 500 gramos. El porcentaje del error técnico de medición dio 0.0%, con una correlación positiva de 1.000. En cuanto a la estatura medida en milímetros, obtuvimos un error de 0.38 con un porcentaje de error de 0.0 y la relación entre el límite fue de 3 mm. Como tolerancia con una correlación de 1.000 positiva. Estas dos variables obtuvieron mayor rango de exactitud. Con relación a la estatura sentada fue de una confiabilidad muy buena, lo cual habla de la experiencia del antropometrista, de los instrumentos de medición y la precisión en los puntos anatómicos de referencia en este caso, el vértex.

Las otras variables de diámetros obtuvieron un alto grado de confiabilidad, ya que las mediciones se tomaron sobre los puntos anatómicos óseos y esto representa un menor error de medición con excepción del diámetro del codo. Por otra parte, los perímetros se mantuvieron casi constantes, excepto el perímetro de la cintura, donde no se obtuvo una buena confiabilidad, esta es una zona con mayor acumulación de adiposidad lo cual contribuye a dificultar la precisión en la toma de la medida. El antropometrista no tenía control sobre la cinta en la parte posterior del cuerpo. Para no desviar la cinta métrica, dicho

problema podría solucionarse colocando un espejo para observar la espalda y cintura de la persona medida con mayor precisión. En los pliegues subcutáneos se obtuvo una buena confiabilidad, lo cual indica que el calibrador de panículo adiposo estaba bien calibrado y la medida fue tomada adecuadamente.

En conclusión, se evidenció que en los procedimientos para realizar mediciones antropométricas confiables, precisas y estandarizadas se requieren técnicas controladas para cometer menos errores en cuanto a la medición. Se debe seguir un patrón internacional de técnicas, estandarizar los puntos anatómicos de referencias, marcar con un lápiz dermatográfico (lápiz para cejas) los puntos antropométricos, calibrar los instrumentos de medición antes de ejecutar las mediciones, usar el mismo instrumento de medición, y que la persona que toma las medidas tenga un mínimo de experiencia, un control de calidad y un cuidadoso monitoreo de las mediciones, todo con el fin de no incurrir en errores. Para esto, se requiere ampliar los estudios antropométricos y unificar los criterios para evaluar los niveles de confiabilidad en poblaciones de adultos jóvenes.

Por otra parte, se propone para un futuro estudio de una técnica válida que consiste en tomar fotos digitalizadas o video del individuo en posición anterior, posterior y lateral. Esta propuesta consiste en tomar las fotografías midiendo el cuerpo con los instrumentos de medición. De esta forma se pueden observar los errores que está cometiendo el antropometrista para corregir a futuro y así poder llegar a una técnica sistemática y estable.

BIBLIOGRAFÍA

- Álvarez, J. (2001). *Ergonomía 20 preguntas básicas para aplicar la ergonomía en la empresa*. Madrid, España: Mapfres, S.A.
- Ávila, R., Prado, L. y González, E. (2007). *Dimensiones antropométricas. Población Latinoamericana*. México: Universidad de Guadalajara.
- Comas, J. (1983). *Manual de antropología física*. Universidad Nacional Autónoma de México. México, D.F.: UNAM.
- Crugall, S.A. México, D.F. (s.f.) Recuperado el 16 de marzo 2012, de <http://www.revistadenutricion.com/calipers.pdf>.
- Charlotte, F. y Meter P. (2001). *El diseño industrial de la A la Z*. Italia: Taschen. Roma.
- Deurenberg, P. y Roubenof, R. (2005). *Composición corporal*. Zaragoza, España: Acribia, S.A.

- Esparza, F. (1993). *Manual de Cineantropometría*. Madrid, España: FEMEDE.
- Farrer, F., Minaya, G., Niño, J. y Ruiz, M. (1997). *Manual de ergonomía*. Madrid, España: Mapfre.
- Faulhaber, J. (1989). *Crecimiento: Somatometría de la adolescencia*. (1ª Ed). México, D.F.: Editorial Universidad Nacional Autónoma de México.
- Flores, C. (2001). *Ergonomía para el diseño*. México, D.F.: Editorial Designio.
- García, P. y Rodríguez, A. (2003). Control de calidad y validez del dato en las evaluaciones antropométricas. En: *Estudios de Antropología Biológica*. XI, pp. 175-191.
- Jellife, D. (1966). *La evaluación del estado nutricional de la comunidad*. O.M.S. Monografía 53.
- Malagón, C. (2004). *Manual de Antropometría*. Colombia: KINESIS.
- Malina, R. (2006). *Antropometría*. Standard: Publice.
- Masali, M. (1998). *Antropometría*. Editorial Chantal Dufrenseve, BA.: Organización Internacional del Trabajo. (O.I.T.).
- Mc.Cormik, E. (1980). *Ergonomía*. Barcelona, España: Gustavo Gili.
- Mondelo, P., Gregori, E., Barrau, P. & Bombardo, P. (2000). *Ergonomía I. Fundamentos*. Colombia: Alfaomega.
- Norton, K. & Olds, T. (2004). *Antropométrica*. Argentina: Biosytem.
- Lapunzina, P. (2002). *Manual de antropometría normal y patológica*. Madrid, España: Masson.
- Panero, J. (1987). *Las dimensiones humanas en los espacios interiores*. México, D.F.: Gustavo Gili, S.A.
- Pozo, J. & Argente, J. (2000). *Técnicas auxiológicas*. Madrid, España: Hospital Infantil del Niño Jesús. Sección de Endocrinología Pediátrica.
- Ramírez, C. (2000). *Ergonomía y productividad*. México, D.F.: Limusa.
- Rodríguez, E. (1990). *Investigación operativa aplicada a los servicios de salud*. Bogotá, D.C. Colombia: Fundación de Santa Fé de Bogotá.
- Ross, W. y Marfell-Jones. (2000). *Cineantropometría*. En: *Evaluación fisiológica del deportista*. Barcelona, España: Editorial, Paidotribo.

- Sánchez, R. (1987). *Dimensiones antropométricas y controles de calidad*. La Habana, Cuba: Instituto de Medicina.
- Sierra, R. (1991). *Diccionario práctico de estadística y técnicas de investigación científica*. Madrid, España: Paraninfo, S.A.
- Sillero, M. (2005). *Teoría de kinantropometría*. España: Universidad Politécnica de Madrid.
- Vargas, L. (1989). *Antropometría: un estudio con criterio ergonómico*. Sociedad de Arte y Cultura Novum, A.C. Serie Salud y Trabajo N° 1. México, D.F.
- Valls, A. (1985). *Introducción a la antropología*. España: Labor.

ERGONOMÍA AMBIENTAL: Iluminación y confort térmico en trabajadores de oficinas con pantalla de visualización de datos

ALDO PIÑEDA GERALDO¹
GUILLERMO MONTES PANIZA²

Recibido: mayo 8 de 2013 / Aceptado: julio 3 de 2014

RESUMEN

El presente artículo es el resultado de la segunda etapa del proyecto de investigación titulado: Ergo-anthropometría en usuarios de pantallas para visualización de datos en oficinas. Se realizó una revisión de referencias sobre los aspectos más sobresalientes de la iluminación y el confort térmico en trabajadores de oficinas, que laboran con pantallas de visualización de datos. El objetivo fue conocer los criterios, las normas de niveles de iluminación y confort térmico. El estudio fue analítico, ya que se realizó una revisión bibliográfica en las bases de datos *Pubmed*, *Bireme*, *Lilacs*, *Scielo* y *normas del Ministerio de Salud*, *Icontec* e *ISO* con énfasis en la iluminación y el confort térmico. Sin embargo, los niveles de iluminación y el confort térmico para oficinas deben ser evaluados para cada tipo de tarea y tomar como referentes las normas nacionales e internacionales.

Palabras clave: ergonomía, ambiental, iluminación, confort, térmico, trabajadores, oficinas, pantallas de visualización, datos, bienestar.

ABSTRACT

The following work is the result of second part of the investigation project named: Ergo-anthropometry in users that work on screens for data reading. A check-out was made on the most important aspects related with illumination and thermic issues on the offices that work with data viewing screens. The objective was to know the and the regulation on illumination levels and thermic comfort. The study of database these issues was analytic, because a bibliographic research was done on the criteria from: *Pubmed*, *Bireme*, *Lilacs*, *Scielo*, regulation from the Colombian Ministry of Health,

-
- 1 Antropólogo Físico de la Escuela Nacional de Antropología e Historia de México, D.F. Especialista en Ergonomía de la Universidad El Bosque. Especialista en Derecho Laboral de la Corporación Universitaria Republicana. Docente-Investigador de la Corporación Universitaria Republicana. Correo electrónico: apineda@urepublicana.edu.co
 - 2 Ingeniero Industrial de la Universidad INCCA de Colombia. Especialista en Auditoría de Sistemas. Especialista en Gerencia de Producción. Candidato a Maestría en Investigación de Operaciones y Estadística de la Universidad Tecnológica de Pereira. Docente-Investigador de la Corporación Universitaria Republicana. Correo electrónico: gemontes28@gmail.com

Icontec and ISO. The levels of illumination and technic comfort for offices must be evaluated for each kind of area and take as reference the national and international regulations on the matter.

Key words: ergonomic environmental, lighting, comfort, thermal, workers, office, display, data, welfare.

INTRODUCCIÓN

El entorno de trabajo debe mantener una relación adecuada entre el ser humano y los factores ambientales físicos, siguiendo los valores de referencias como pueden ser las normas ISO e Icontec, para obtener niveles de confort y conseguir un grado de bienestar y satisfacción del trabajador. Por otra parte, los problemas que aquejan a los empleados de oficinas son básicamente: la visión, la iluminación y los aspectos termo higrométricos. El planteamiento del problema formula la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son los valores de referencias de confort de los factores físicos (iluminación y térmicos) que pueden contribuir a mejorar el ambiente y el bienestar de los trabajadores que laboran con pantallas de visualización de datos? Los objetivos fueron, conocer los criterios de iluminación y el confort térmico de acuerdo a las normas establecidas y las recomendaciones de los valores admisibles.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En los últimos años se han incrementado los problemas en los trabajadores que realizan tareas (el desempeño, los medios técnicos con los que cuenta, las distribuciones de las tareas, las condiciones climáticas y el ambiente físico) con pantallas de visualización de datos. Entre las molestias que presentan mayor relevancia están: la visión, iluminación y los aspectos termo higrométricos. La prevalencia de fatiga visual entre los operadores de pantallas es mayor que la de aquellos trabajadores en puestos no informatizados. Los más señalados son los de fatiga visual, que de acuerdo a encuestas se estima que entre un 10% y 40% de las personas que trabajan con monitores, padecen alteraciones con molestias oculares que se dan en tres niveles: a) molestias oculares, tensión ocular, pesadez palpebral, pesadez de ojos, picores, necesidad de frotarse los ojos, somnolencia, lagrimeo, ojos llorosos, aumento de parpadeo, ojos secos y enrojecimiento de la conjuntiva, molestias que están relacionadas con la fatiga de la función de acomodación del ojo. Otra característica visual es la distancia a veces inadecuada de los tres puntos de visión permanente: pantalla-teclado y documento. En un estudio realizado se encontró que las mujeres tienen un mayor grado de molestias visuales que los hombres. Por otra parte, la edad es un factor que influye en las molestias visuales y se conoce que entre los 40 y 50

años, se presenta este problema, debido a los cambios de capacidad de acomodación de los ojos que ocurren rápidamente (Rey & Jacques. s/f). En algunos reportes se menciona que está comprobado que después de los 40 años, las personas sufren una pérdida aproximada del 15% de la agudeza visual (Castillo, Ramírez & Andrea). Mondelo et al, nos dice que los problemas de iluminación se deben a la ubicación de las herramientas en lugares donde se desarrollan las tareas de oficinas, sin tener en cuenta las diferentes exigencias en cuanto a las condiciones y niveles de iluminación (Mondelo, 2002). De otra parte, Varela (2006) considera que otro de los problemas en las oficinas son los reflejos en las pantallas, producidos por la presencia de la luz directa. De otro lado, están los deslumbramientos (asociados con la presencia de fuentes de luz directa muy intensa y también con la reflejada sobre superficies planas) y la insuficiente iluminación del entorno (Varela, 2006).

En cuanto al confort térmico en trabajadores con pantallas de visualización de datos, cada día es más numerosa la demanda del trabajo con computadores y son frecuentes los problemas por la falta de confort térmico, la adaptación a la temperatura, la humedad, la temperatura de paredes y los objetos de trabajo. La determinación de unas condiciones ambientales que satisfagan a todos es una labor compleja, más no imposible de lograr, dadas las diferencias entre las preferencias y variabilidad de las personas (Page, s/f).

Pregunta de investigación

¿Cuáles son los valores de referencias de confort para los factores físicos (iluminación y térmicos) que pueden contribuir a mejorar el ambiente físico y bienestar de los trabajadores en oficinas que laboran con pantallas de visualización de datos? Los objetivos planteados fueron, conocer los criterios de iluminación y el confort térmico de las normas establecidas para conformar parámetros en estudios de oficinas con pantallas de visualización de datos.

1. ERGONOMÍA AMBIENTAL Y CONFORT

La ergonomía ambiental analiza e investiga las condiciones externas al ser humano que influyen en su desempeño laboral. Dentro de estas condiciones se encuentran los factores ambientales físicos como son: nivel térmico (refrigeración y calefacción), nivel de ruido y vibración, nivel de ventilación (aire y humedad relativa) y nivel de iluminación; estudiarlos ayudará a diseñar y evaluar mejores condiciones laborales e incrementar el confort, la productividad y la seguridad (Silva, 2011). Según el diccionario de la Lengua Española la palabra confort, es aquello que produce bienestar y comodidad en el cuerpo humano. Por lo anterior, "confort" apunta a un estado placentero de armonía

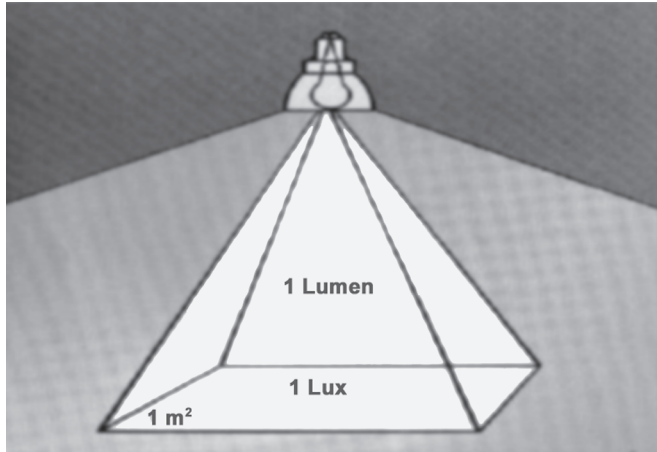
fisiológica, psicológica y física entre el ser humano y su ambiente. Un sistema de ergonomía ambiental es justamente favorecer el máximo la percepción de las informaciones visuales en los trabajadores con pantallas de visualización de datos. Para un aceptable nivel de confort, no debe existir un excesivo contraste en el entorno de la tarea a ejecutar y, de otra parte, que los espacios no produzcan deslumbramientos tanto por las propias fuentes luminosas como en las superficies del entorno de trabajo (Llaneza, 2007). Según la American Society of Heating and Air Conditioning Engineers, ASHRAE el confort, es la condición de la mente que expresa la satisfacción con el entorno térmico.

1.1. Ambiente físico en pantalla de visualización de datos, visión e iluminación

La calidad y eficiencia ergonómica en los puestos de trabajo de oficinas va a depender no solo de los muebles (silla, escritorio), computador, teclado, porta documento, mouse, lápiz óptico, escáner e impresora, sino también de los aspectos del entorno ambiental, donde se realizan las actividades. Ya que las condiciones de iluminación, el confort térmico y el espacio de trabajo son particularidades del entorno que intervienen en la realización de las tareas y en el confort de los trabajadores (Page, s/f).

La actividad laboral en oficinas, para que pueda llevarse de una forma eficaz y precisa la visión (característica personal) y la iluminación (característica ambiental), se complementan, ya que se considera que el 50 % de la información sensorial que recibe el hombre es de tipo visual (Llaneza, 2007). La visión es básicamente el proceso por medio del cual se transforma la luz en impulsos nerviosos, capaces de generar sensaciones. El órgano que hace estas funciones fisiológicas es el ojo. Y por el otro lado, está la iluminación (E) que es el flujo luminoso F (lumen) por unidad de superficie A (m^2), es decir $E = F/A$. Cuando la luz emitida por una fuente incide sobre una superficie, se dice que esta se encuentra iluminada, siendo entonces la iluminación la cantidad de flujo luminoso (Resolución 2400 de 1979). Dado que el flujo F se mide en lúmenes y el área A en m^2 la iluminación E se mide en lúmenes por m^2 o lux (figura 1).

El ambiente luminoso adecuado es uno de los agentes que más influyen en el confort de los puestos de trabajo y así mismo, en la reducción de los signos de fatiga. Sin embargo, hay que tener cuidado ya que esto va a depender de las características y tamaño de las oficinas, la complejidad y las dificultades de las tareas, así como las necesidades perceptivas de las personas. El trabajo con pantallas de visualización de datos, tiene características específicas como el nivel de atención requerido y el tiempo de exposición frente a los monitores. En este lapso de tiempo, los trabajadores requieren de una lectura, análisis u observación en el teclado, para lo que se requieren niveles de iluminación de

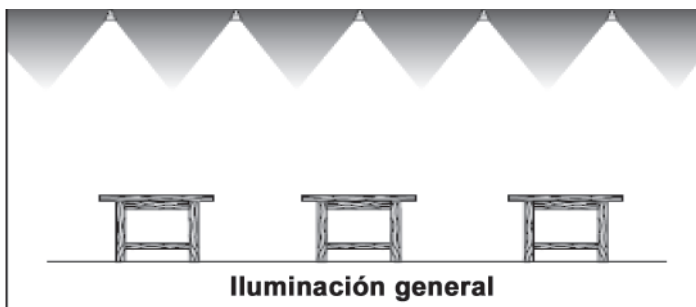


Fuente: Taboada, 2001.

Figura 1. Lux.

calidad, mientras que la lectura sobre las pantallas exige niveles más bajos, con el objeto de conseguir un adecuado contraste entre los caracteres y el fondo (Ramos, 2006).

En los puestos de trabajo con pantallas de visualización de datos, debe existir una iluminación general uniforme (con dispositivos anti brillos, distribuir la luz hacia arriba, hacia abajo, minimizar brillos y lograr una iluminación homogénea, figura 2). Si se requiere de fuentes de iluminación individual complementaria, esta no deberá estar cerca del monitor, ya que puede causar deslumbramiento directo o en reflexiones. Por lo anterior, debe existir iluminación adecuada para el tipo de tarea que vaya a realizar el usuario. Por otro lado, no debe alcanzar valores que reduzcan el contraste de la pantalla por debajo de lo tolerable (De Pablo, 2007).



Fuente: OIT. 2001.

Figura 2. Iluminación general.

1.2. Fatiga visual

La fatiga visual se considera como una alteración funcional, debida a demandas sobre los músculos oculares y de la retina, a fin de obtener una focalización fija de la imagen sobre la retina. Las causas pueden ser por estrés y cansancio, que al sumar a los aspectos del ambiente físico, incrementa la fatiga visual. Así mismo, puede presentarse en trabajadores sin defectos de refracción, que pasan varias horas en el computador. Otros factores que influyen en la fatiga visual son: las distancias entre el monitor-teclado y los documentos, la calidad de imagen de la pantalla, luminancias de la pantalla (cd/m^2 o stilb), acomodación sostenida de la visión cercana, contrastes invertidos, borrosidad de los caracteres, posición excesivamente vertical de la pantalla, reflejos producidos por el texto y número de ventanas abiertas. Por otra parte están las condiciones de trabajo desfavorables como los niveles de ruido por las conversaciones, otros ruidos, circulación de personas, oscilaciones de temperatura y corrientes de aire. El ambiente físico juega un papel importante por la calidad de la iluminación, teniendo en cuenta las especificaciones del monitor y documento. Iluminaciones insuficientes, irregulares, contrastes excesivos, reflejos, hacen que la fatiga aparezca mucho antes (Mondelo, Gregori, De Pedro & Gómez. 2002).

Los síntomas más frecuentes de la fatiga visual son:

- a. Las molestias oculares que se caracterizan por tensión y pesadez en los globos oculares y en las órbitas, incremento de la frecuencia de parpadeo, ojos húmedos y secos, que pueden desencadenar hiperemias conjuntivales (aumento del flujo sanguíneo a nivel conjuntival, por dilatación de los vasos sanguíneos), por lo que los operadores tienen la necesidad de frotarse los ojos (figura 3a y 3b).



Fuente: Google. Imágenes de fatiga visual.

Figura 3a y 3b. Fatiga visual laboral.

- b. Trastornos visuales. Se manifiestan en forma de deslumbramiento, fotofobia, postimágenes al cerrar los ojos, franjas coloreadas alrededor de los caracteres de la pantalla, causadas por la imposibilidad de mantener la visión binocular (figura 4).



Fuente. Google. Imágenes de fatiga visual.

Figura 4. Fatiga visual laboral.

- c. Síntomas extra oculares. Entre los más reincidentes están, los dolores de cabeza, que surgen después de cierto tiempo de trabajo o al término de la jornada laboral y se reducen con el descanso y en periodos vacacionales (Gil, 2006) (figura 5a y 5 b).



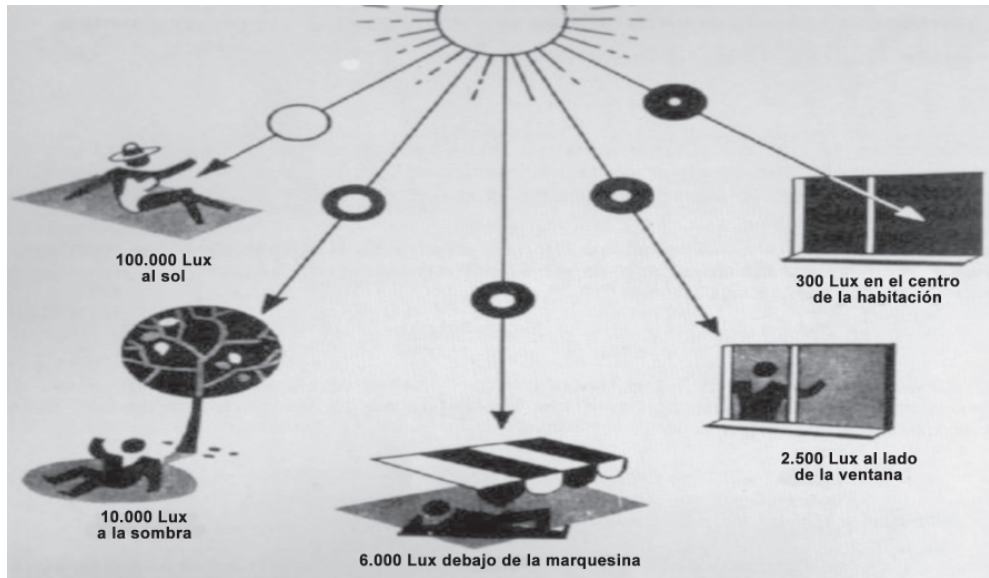
Fuente: Google. Imágenes de fatiga visual.

Figura. 5a y 5b. Fatiga visual.

1.3. Iluminación y deslumbramiento

Disponemos de dos clases de iluminación: natural y artificial; la primera corresponde a la suministrada por la luz diurna y presenta grandes ventajas sobre la iluminación artificial, ya que permite definir cabalmente los colores y

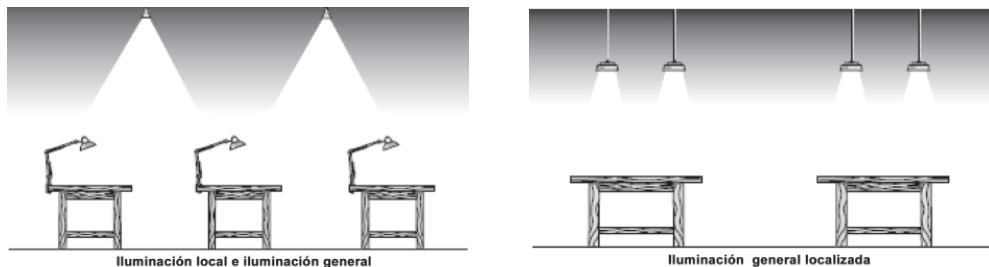
en horas de máxima iluminación se puede presentar hasta 100.000 lux (figura 6). Además, es más económica y produce menos fatiga. Tiene el inconveniente de ser variable a lo largo de la jornada de trabajo, por lo que deberá complementarse con la iluminación artificial, la cual es suministrada por fuentes luminosas artificiales como las lámparas incandescentes o fluorescentes.



Fuente: Taboada, 1979.

Figura 6. Iluminación natural.

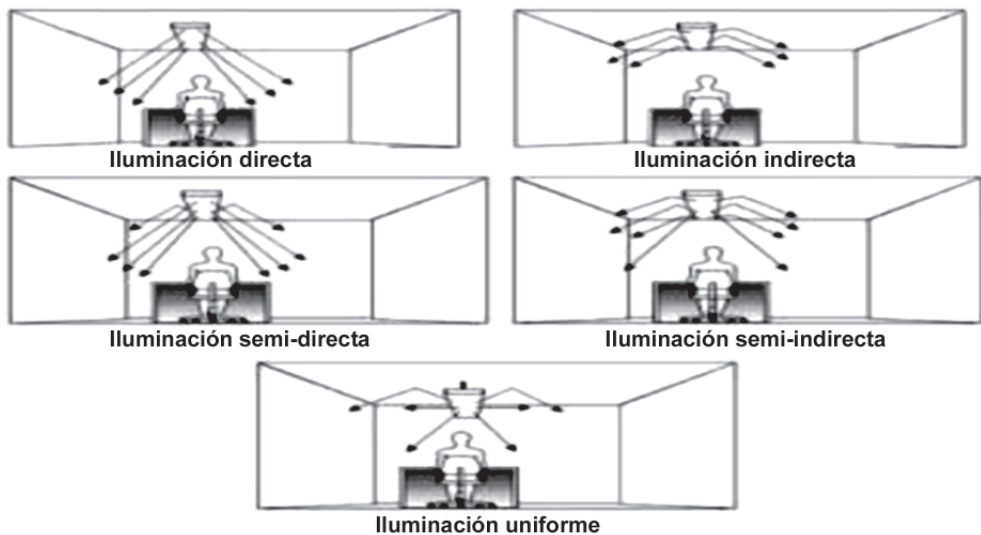
La distribución de la iluminación puede ser general, cuando la luz es distribuida uniformemente sobre toda la superficie de trabajo, o localizada, cuando la luz incide sobre alguna zona no suficientemente iluminada con iluminación general (figura 7a y 7b).



Fuente: Taboada, 1979.

Figura 7a y 7b. Distribución de la iluminación.

La iluminación artificial puede ser directa, semi-directa, uniforme, semi-directa e indirecta, según el porcentaje de la luz reflejada (Cortés, 2002) (figura 8). En la iluminación directa el flujo de luz se dirige directa y completamente hacia la superficie a iluminar, aprovechándose entre un 90% y un 100%; la fuente de luz generalmente son pantallas colgantes o apliques en las paredes; genera sombras duras e intensas. La semi directa, es una iluminación directa con un difusor entre la fuente de luz y la zona a iluminar que hace que entre un 10% a 40% del flujo luminoso llegue a la superficie a iluminar, procedente de un reflejo previo en las paredes; el restante porcentaje de flujo luminoso (90 a 60) llega directamente a la zona a iluminar; las sombras que genera no son tan duras y la posibilidad de deslumbramiento es menor. La iluminación indirecta es aquella donde del 90% al 100% del flujo luminoso se dirige hacia el techo y luego se distribuye en el ambiente a iluminar por refracción; la fuente luminosa que se utiliza es cerrada en su base y no se utiliza difusor para dirigir el flujo hacia arriba; produce un ambiente agradable con una luz suave y sin sombras. La semi indirecta es una combinación de la semi directa mediante el uso de un difusor que emite un flujo luminoso hacia la superficie a iluminar, y la indirecta, ya que por arriba envía, sin difusor, un flujo luminoso hacia el techo; genera efecto grato sin sombras y sin deslumbramiento (OIT. Enciclopedia de Salud y Seguridad en el Trabajo, 2001).

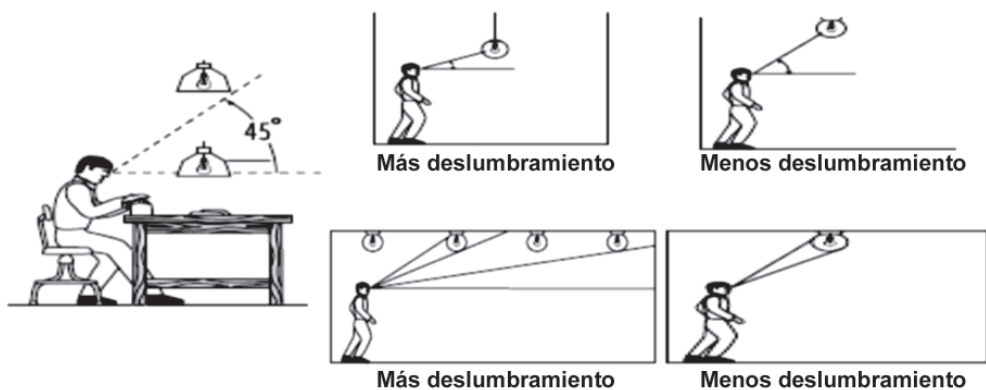


Fuente: Google, imágenes de iluminación directa artificial

Figura 8. Sistemas de iluminación.

Así como la escasez de luz es nociva para la salud, también lo es la presencia de mucha luz. Se puede decir que el deslumbramiento, es la presencia dentro del campo visual de brillos que producen molestias, interferencias en la visión

y fatiga visual. Se presenta cuando el trabajador es expuesto a una luminancia muy superior a aquella a la que la retina estuviera adaptada. El deslumbramiento puede clasificarse en directo y reflejado. El primero es causado por una fuente de luz dentro del campo visual mientras que el deslumbramiento reflejo o espectacular es provocado por reflejos de un brillo muy elevado procedentes de superficies pulidas o vidriosas y que van a dar a los ojos (Mc Cormick, 1980). El directo, originado al contemplar directamente una estimulación de alta luminancia, proveniente de una ventana o luminaria, puede originar disconfort y fatiga visual, como consecuencia del continuo ajuste y reajuste de las pupilas a dos niveles de iluminación (figura 9). Una fuente de luz reflejada en la pantalla de un monitor crea una imagen brillante que dificulta la lectura de los caracteres en dicha pantalla (Llanez, 2007). Estos también pueden dividirse en incapacitantes o disconfortantes en función de sus efectos. Los incapacitantes reducen la capacidad funcional del sistema visual, en tanto que los disconfortantes producen incomodidad o molestias (Lillo, 2000).



Fuente: OIT. 2001.

Figura 9. El deslumbramiento.

1.4. Nivel de iluminación y valores sugeridos

El nivel de iluminación (lux) adecuado para cada tipo de tarea resulta ser importante para los trabajos en oficinas. Entre los factores destacados están: las distancias entre los objetos y los ojos del observador, el grado de reflexión de los objetos observados, así como el ambiente que los rodea, contraste entre los detalles y los fondos sobre los que destacan, límites máximos para evitar deslumbramientos y reflejos, la edad y las diferencias individuales. Con la edad, nuestro sistema visual sufre una degeneración que hace necesario un aumento del nivel de iluminación para mantener el mismo rendimiento visual (Mondelo, Gregori, De Pedro & Gómez, 2002). Los niveles de iluminación de acuerdo a las actividades en oficinas, según Cortés (2002), son las siguientes:

Tabla 1. Niveles de iluminación en oficinas

Trabajo y oficinas	Nivel de iluminación recomendado (en lux)
Para trabajos administrativos normales y oficinas	500 a 1.000
En trabajos de oficinas con claros cometidos visuales	250
En trabajos de oficinas con cometidos visuales normales, como contabilidad, mecanografía y con pantallas de visualización de datos	500 a 1.000
En oficinas amplias	1.000

Fuente: Cortés, J. (2002).

Existen otros aspectos recomendados por la Sociedad de Ingenieros Eléctricos de Estados Unidos de América, los cuales se muestran en la tabla 2.

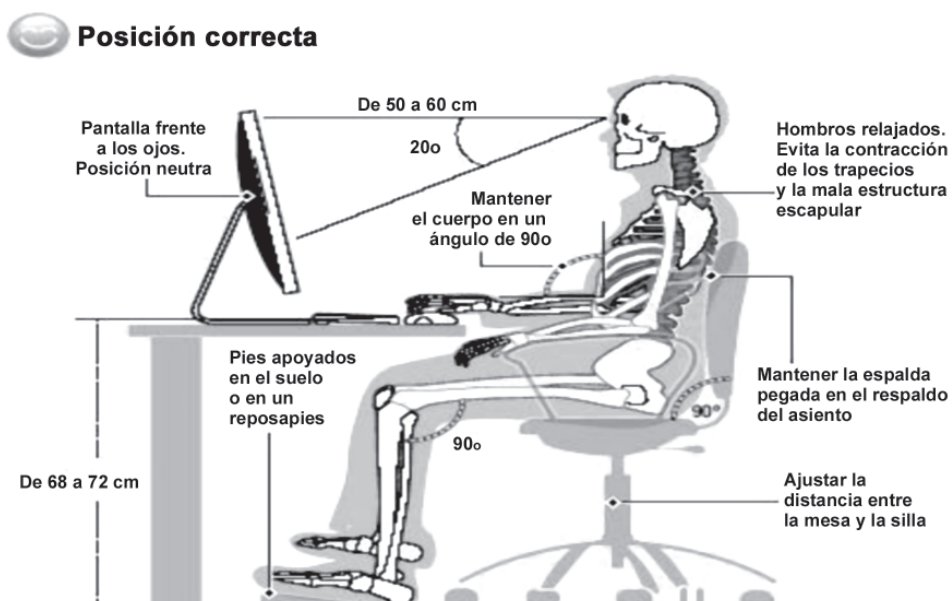
Tabla 2. Niveles de iluminación en la ejecución de tareas

Tarea	Niveles recomendados (lux)
La orientación simple para visita corta	Entre 50,75 y 100
Espacios de trabajo donde las tareas son exigentes	Ocasionalmente entre 100, 150 y 200
Ejecución de la tarea visual con altos contrastes y tamaño grandes	Entre 200, 300 y 500
Ejecución de tareas visual con contraste medios de tamaño pequeño	Entre 500, 750 y 1.000
En los bancos en las áreas para escribir	Entre 200, 300 y 500
En los cajeros	Entre 300 y 500
En las áreas audiovisuales	Entre 200, 300 y 500
En recepción	Entre 100, 150 y 200
Para lecturas en procesamiento de datos y tareas electrónicas, así como monitores	Entre 50.75 y 100
Lecturas en impresora de inyección de tintas	Entre 200, 300 y 500
Las lecturas de las impresiones de las teclas	Entre 200, 300 y 500

Fuente: Sociedad de Ingenieros Eléctricos de Estados Unidos de América.

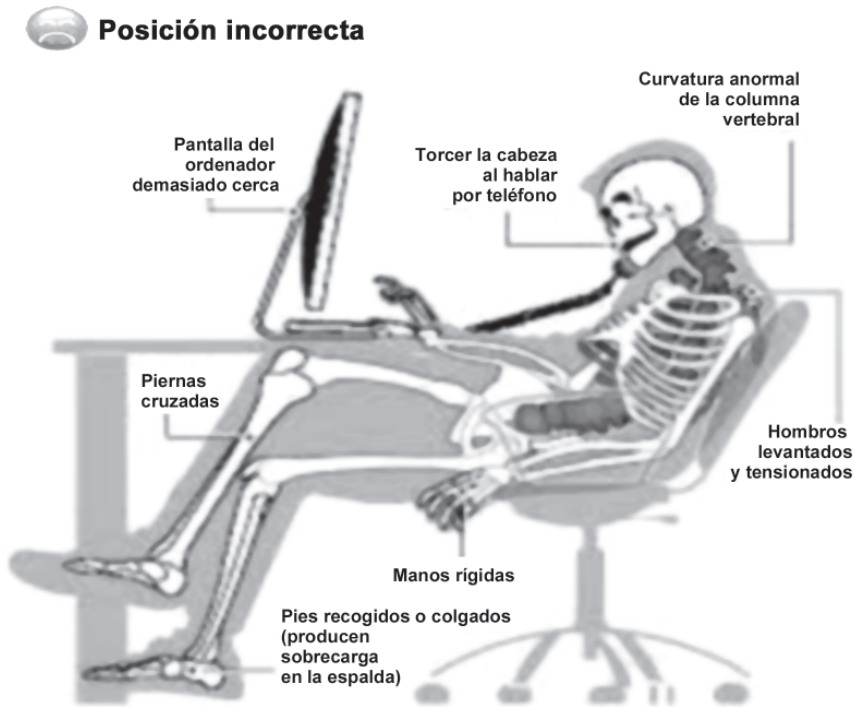
1.5. Ubicación del puesto y el monitor

Una manera efectiva de controlar los riesgos se logra mediante una correcta adecuación ergonómica y posterior mantenimiento del puesto de trabajo. La pantalla del monitor es el elemento fundamental, ya que tiene una relación directa con el puesto de trabajo, sin ella no estaría configurado el puesto de PVD. Está destinada a proporcionar información de forma visual; además, tiene grandes repercusiones sobre la salud de los trabajadores. En la mayoría de las investigaciones sobre las pantallas y los puestos de trabajo en PVD, se exponen algunos requisitos para un mejor bienestar de los trabajadores. Entre los aspectos que sobresalen son los siguientes: ajustar fácilmente la luminosidad y el contraste entre los caracteres y el fondo de la pantalla y adaptarlos a las condiciones del entorno y al grado de luminosidad. La pantalla deberá ser orientada e inclinable, para adaptarse a las necesidades del usuario y evitar reflejos. Se debe colocar bajo un ángulo comprendido entre la línea horizontal y la trazada a 60° bajo la horizontal. El plano horizontal debe estar a un ángulo de 120° respecto a los ojos y la distancia del monitor a los ojos, no deber ser inferior a 40 cm, siendo recomendable emplear distancias entre 40 y 60 centímetros (Forte, 2005). En la figura 10a se ilustra la forma correcta mientras que en la figura 10b se ilustra una forma incorrecta.



Fuente: Google. Imágenes de fatiga visual.

Figura 10a. Ubicación del puesto de trabajo y del monitor.



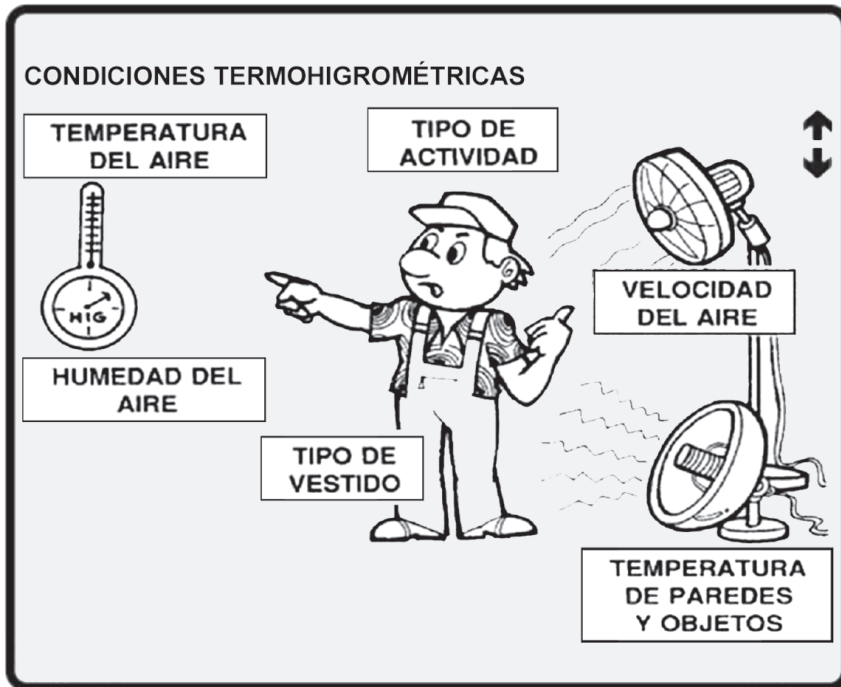
Fuente: Google, Imágenes de fatiga visual.

Figura 10b. Ubicación incorrecta del puesto de trabajo y el monitor

2. CONFORT TÉRMICO

Conseguir un microclima confortable en los puestos de trabajo en pantallas de visualización de datos es esencial, ya que la simple aparición de sudoración o la sensación de frío en los trabajadores, reducen la capacidad laboral. El confort térmico es la manifestación subjetiva de conformidad o satisfacción con el ambiente térmico existente. Está relacionado con el balance térmico del cuerpo humano, que depende de variables que se analizarán en este estudio (Dirección de seguridad e higiene, 2005). Las condiciones climáticas de una u otra forman influyen en los lugares de trabajo con pantallas de visualización de datos y en las actividades, por lo que se deben incluir en el diseño de puestos de trabajo. Entre los factores del ambiente térmico tenemos la temperatura, humedad relativa, ventilación (velocidad del aire), así como del trabajador(a) el tipo de actividad que realiza, su metabolismo y la vestimenta que utiliza (Cortés, J. 2002). En 1970, el estudio de "thermal confort" del investigador de la Universidad de Copenhagen, P.O. Fanger, incluyó en su método de valoración la práctica total de las variables que influyen en los intercambios

térmicos del ser humano-ambiente, que contribuyen a la sensación del confort. Este método se aplica actualmente para evaluar situaciones de confort térmico y su metodología. Se puede consultar en la norma UNE-EN ISO07730, que es el referente que se puede aplicar para investigaciones de confort en oficinas (figura 11).

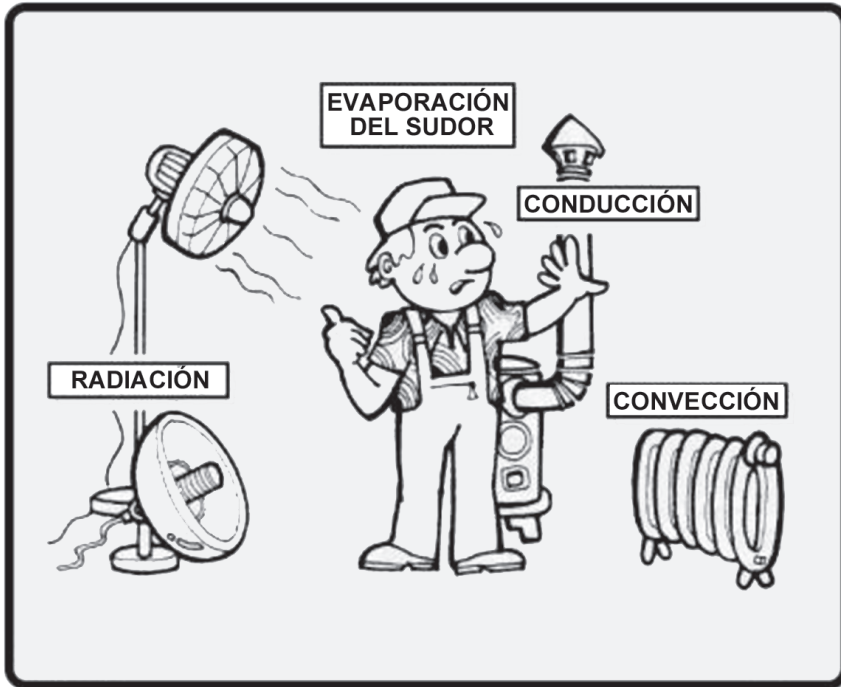


Fuente: Google, Imágenes de confort.

Figura 11. Variables de confort térmico.

2.1. Confort de frío y calor. Humedad relativa y diferencias de temperatura

La temperatura seca del aire es la que se encuentra rodeando al individuo. La diferencia entre esta temperatura y la piel de las personas determina el intercambio de calor entre el individuo y el aire, este se llama, intercambio de calor por convección. Así mismo, tenemos el intercambio de calor por radiación entre unas y otras superficies del ambiente (piel, mesa, escritorios, sillas, computador, teclado, cristales, techo y paredes). (Instituto Nacional de Seguridad e Higiene del Trabajo, 2007). La temperatura en las siguientes épocas debe ser: en verano entre 23° a 26° y en invierno entre 20° y 24° (De Pablo, C. 2007) (figura 12).



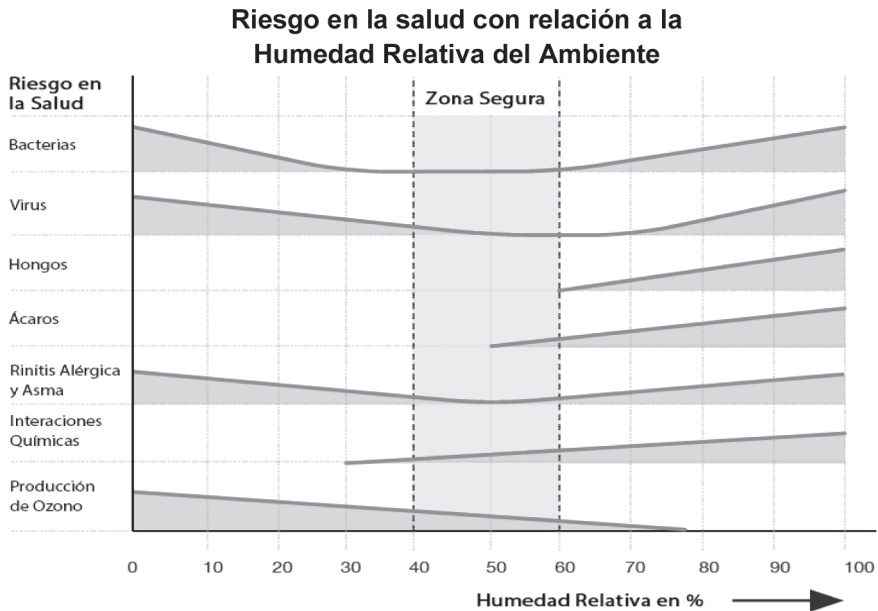
Fuente: Google, Imágenes de confort de frío y calor.

Figura 12. Intercambio de calor del cuerpo humano y el aire.

En cuanto a las diferencia de temperatura, es conveniente disponer de una distribución homogénea de temperaturas entre paredes, y el suelo y techo, para evitar asimetrías de temperaturas radiantes, que pueden dar lugar a sensaciones de disconfort. Estas situaciones se presentan cuando estamos cerca de paredes o ventanas mal aisladas en invierno o cuando recibimos luz solar directa. Por otra parte, también se presentan incomodidades por tener los pies apoyados en suelos fríos o calientes (Incluir tapetes para el frío o calor).

La humedad es el contenido de vapor de agua que contiene el aire. Un valor importante relacionado con la humedad es la humedad relativa (HR), es la relación porcentual entre la presión de vapor de agua existente, con respecto a la máxima posible para la temperatura del aire existente (Mondelo, Gregori, Comas, Castejón & Bartolomé, 2001). La percepción de la temperatura no solo va a depender de la temperatura del aire, sino también de la humedad. Es decir, al aumentar la humedad se incrementa la temperatura efectiva. Y por el contrario con niveles bajos de humedad relativa, se produce sequedad en las mucosas conjuntivales, respiratorias y ojos. En otros estudios se ha visto que si es alta la humedad, provoca una disminución de la atención, de la vigilancia y

de la destreza de los gestos (Ramos, 2006). En el trabajo de oficinas y de acuerdo a los rangos de confort, se debe mantener una humedad relativa entre 45% y el 65%. De no ser así se presentan riesgos (figura 13).



Fuente: Google. Diconan.com

Figura 13. La humedad relativa y los riesgos asociados para diferentes niveles.

2.2. Metabolismo, vestimenta y confort

El metabolismo es la suma de las reacciones químicas que se producen en todas las células del organismo. El límite mínimo está determinado por la actividad básica para mantenerse vivo, por lo que recibe el nombre de metabolismo basal (Mb), varía de acuerdo a factores como: edad, género, peso y otras causas por origen psicofisiológico.

De otra parte, el vestido también influye en la sensación de confort, cuanto mayor sea la resistencia térmica de la vestimenta, más difícil resulta para el cuerpo humano desprenderse del calor generado y cederlo al ambiente. El confort térmico se trasmite cuando se produce cierto equilibrio entre el calor generado por el organismo como consecuencia de la demanda energética y el que es capaz de ceder o recibir del ambiente (Instituto Nacional de Seguridad e Higiene del Trabajo, 2007). El calor metabólico se correlaciona habitualmente

con la superficie corporal (S.C.) en m² y con el peso (Pc) en kilogramos (kg). Esta se puede determinar con la ecuación: $SC = 0.202 Pc^{0.425} H^{0.725}$. Donde:

SC= Superficie | corporal (m²).

Pc= Peso corporal en kg.

H= Estatura en metros (m).

(Mondelo, Gregori, Comas, Castejón & Bartolomé, 2001).

La medida del aislamiento de la indumentaria es el *clo*, que es la medida del aislamiento térmico necesario para mantener cómodo (confort), a un individuo sentado y en descanso, en una habitación normalmente ventilada a 21°C de temperatura y con una humedad relativa del 50%. Puesto que el individuo normal sin ropa, se siente cómodo a unos 30°C, una unidad *clo* sería la necesaria para producir una sensación igual a unos 21°C, este es a grandes rasgos el total de aislamiento necesario para compensar un descenso de unos 8°C y equivale aproximadamente al aislamiento de las ropas que normalmente llevan las personas (McCormick, 1980). Con el fin de facilitar el metabolismo y el confort, la temperatura en verano debe mantenerse entre 23°C a 26°C, mientras que en invierno debe estar entre 20°C y 24°C; asimismo, la humedad relativa debe mantenerse entre 45% a 65%. De esta manera se prevendrá la sequedad de ojos y mucosas (De Pablo, C., 2007).

2.3. Valores de referencias y normas

Los valores de referencia internacionales y las disposiciones mínimas para las condiciones ambientales de los lugares de trabajo, en cuanto al ambiente térmico, que deben cumplirse son los siguientes: La temperatura de los locales donde se realicen trabajos sedentarios propios de oficinas o similares estará comprendida entre 17°C y 27 °C. Donde se realicen trabajos ligeros estará entendida entre 14°C y 25°C. La humedad relativa estará comprendida entre el 30% y el 70%, excepto en los locales donde existan riesgos por electricidad estática en los que el límite inferior será el 50%. Los valores y referencias están en distintas normas nacionales e internacionales, por ejemplo: la Norma UNE-EN-ISO 7730/1996, "Ambientes térmicos moderados" o en el borrador de norma europea PrENV-1752/1997 "Ventilation for buildings. design criteria for the indoor environment". La primera está incluida en la Instrucción Técnica Complementaria ITE 02.2.1 "Bienestar térmico", del Reglamento de Instalaciones térmicas en los edificios (Real Decreto 1751/1998, de 31 de julio). Adicionalmente, en el documento de la guía técnica para el análisis de exposición a factores de riesgo ocupacional, se pueden apreciar las siguientes normas para condiciones termo higrométricas que a continuación se relacionan: para calor tenemos el WBGT ISO 7243 e ISO 7923. Frío ISO 11079 e ISO 15753. Para la humedad existe la ISO 7730, ISO 7243, ISO 15753 y para disconfort térmico

tenemos la ISO 7730, INSHT 1983. Existen otros métodos propuestos por la guía técnica para el análisis de exposición a factores de riesgo ocupacional (2011). El método para evaluación de riesgo para valores límites permisibles por estrés por calor es el siguiente:

Trabajo-descanso	Trabajo ligero	Trabajo moderado	Trabajo pesado
Trabajo continuo	30.0	26.7	25.0
75%-25% descanso cada hora	30.6	28.0	25.9
50% trabajo-50% descanso cada hora	31.4	29.4	27.9
25% trabajo-75% descanso cada hora	32.2	31.1	30.0

Fuente: Gutiérrez. En: Ministerio de la Protección Social, 2011.

En cuanto a TLV (Threshold Limit Value o Valor Límite Umbral) permisibles por estrés por calor y calor metabólico, se referenciará específicamente el trabajo liviano para personas que trabajan con PVD. La calificación de severidad es 2. La estimación del calor metabólico es trabajo liviano entre 100 y 200 kcal/hora. En postura sedente: trabajo manual como escribir, digitar y trabajo con las manos, ante brazo y brazos. Para trabajos livianos se requiere de valores límites entre 0.2 a 1.2 kcal/min (Gutiérrez, 2011. En: Ministerio de la Protección Social).

En el mismo documento, se recomiendan lineamientos técnicos para las evaluaciones, dentro de los cuales se encuentra la iluminación y normas a utilizar, entre ellas está la Resolución 2400 de 1979. Icontec GT-08 para oficinas. Norma ISO 8995. Las áreas que se evalúan son el espacio, ubicación, distancia de las fuentes directas e indirectas, tipos de paredes, pisos, materiales y colores. Se debe hacer un informe de la evaluación con los siguientes criterios: objetivos, marco de referencia, métodos, instrumentos de medición, criterios de valoración, resultados, análisis de los resultados y recomendaciones.

Para el estrés térmico frío, se recomienda ver la norma colombiana, Resolución 2400 de 1979, artículo 64. Criterios de valoración ISO 11079: 1989. ACGIH y el método de Fanger, ISO 7730: 1996.

Para estudios de exposición a estrés por frío, se recomienda el método IREQ-método del índice del aislamiento del vestido requerido. Y por otra parte, el método del índice de frío (WCI), aplicable para la valoración cuando hay partes del cuerpo no protegidas por el vestido. Se debe hacer un informe de la evaluación con los siguientes aspectos: objetivos, marco de referencia, métodos, instrumentos de medición, criterios de valoración, resultados, análisis de los resultados y recomendaciones (Gutiérrez, 2011. En: Ministerio de la Protección Social).

3. INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN

El instrumento de medición para la iluminación es el luxómetro (figura 14), que básicamente contiene una célula foto-eléctrica de capa barrera, generalmente es de selenio por tener este material una sensibilidad espectral semejante al ojo humano (Cortes, 2002). La herramienta recomendada para la realización de investigaciones ambientales en oficinas es el luxómetro extech modelo HD450: se pueden hacer lecturas pico, lecturas de modo relativo que indican cambios del nivel en la luz. Tiene carcasa dura, rígida y ergonómica. Y para fines prácticos de campo incluye puerto USB, sensor de luz, cubierta protectora con un metro de cable y batería de 9V. Con certificado NIST. Ficha técnica 1.

Ficha técnica 1.

Datos generales

Nombre del equipo: Luxómetro Modelo: HD450
Dimensiones: Medidor: 170 x 80 x 40 mm
Foto detector: 115 x 60 x 20 mm (4.5 x 2.4 x 0.8")
Fuente de energía: batería 9V Vida de la batería: 100 (retroiluminación apagada)
Peso: Sin batería: 13.8 onzas (Aprox.). Con batería: 390 onzas (Aprox.)
Indicación de batería débil: el símbolo batería aparece en la LCD
Longitud del cable sensor: 1 m (3,2')

Especificaciones

Pantalla: Pantalla LCD de 4.000 cuentas con gráfica de barras de 40 segmentos.
Grabación: en modo continuo hasta 16.000 Rango: 40.000 Fc o 400.000 lux
Software: compatible con Windows 95/98/nt/2000/me/xp
Escala: Cuatro escalas, selección manual
Indicación de sobre escala: LCD indica "OL"
Respuesta al espectro: CIE fotópica (CIE una curva de respuesta del ojo humano)
Precisión del espectro: $V\lambda$ función ($f_1 \leq 6\%$)
Respuesta del coseno: $f_2 \leq 2\%$. Coseno corregido para incidencia angular de luz
Repetibilidad de la medida: $\pm 3\%$
Tasa del indicador: 760 mseg (aprox.) para pantalla digital y de gráfica de barras
Foto detector: foto diodo de Si con filtro de respuesta del espectro

Usos y cuidados adecuados

Usos: medición de la luz
Cuidados
Condiciones de operación
Temperatura: 0 a 40 °C (32 a 104 ° F) Humedad: < 80% RH
Condiciones de almacenamiento
Temperatura: 10 a 50 °C (-14 a 140 ° F) Humedad: < 80% RH

Fuente: Cortés [2002].

Otro instrumento de medida es el registrador de datos data-logger cuyos datos se muestran en la ficha técnica 2.



Fuente: Google. Imágenes de luxómetro hd450

Figura 14. El luxómetro extech.

Ficha técnica 2.

Datos generales

Nombre del equipo: data-logger

Medidas: 44 x 12 x 97 mm

Fuente de energía: batería de litio de 3.6 V Vida de la batería: 100 días

SopORTE de montaje con cerradura de combinación

Especificaciones

Memoria: Para la humedad relativa: 16.000 lecturas

Para temperatura: 16 lecturas

Capacidad: Pueden guardar hasta 40.000 valores en memoria

Rango: Para humedad relativa de 0 a 100 %.

Para temperatura: 40°C a 70°C

Pantalla: LCD que muestra las lecturas actuales, mínimas y máximas, y cuenta con estado de alarma.

Exactitud: $\pm 8^\circ\text{C}$ (-80 a 35.1°C); $\pm 5^\circ\text{C}$ (-35 a 70°C). Resolución: 0.1°C

Interfaz: Para USB para fácil configuración y descarga de datos

Software de análisis compatible con Windows® 2000, XP y vista. También pueden leerse con cualquier celular con Android y conectividad FNC.

Frecuencia de muestreo de datos seleccionable: un segundo hasta 24 horas umbrales de alarma, programables por el usuario para la humedad relativa y la temperatura.

Usos y cuidados adecuados

Usos: registro continuo de la temperatura, humedad, voltaje, amperaje y CO₂

Cuidados

Condiciones de operación

Temperatura: -80°C a 70°C

Humedad: < 80% RH

Condiciones de almacenamiento

Temperatura: -80°C a 70°C

Humedad: < 80% RH

Fuente: Riva, Piergiovanni et al. (2001).

Estos instrumentos son los recomendables para el desarrollo de investigaciones en ergonomía ambiental y para el ambiente físico en oficinas.

METODOLOGÍA

El presente artículo se diseñó con base en una revisión bibliográfica y se accedió a la base de datos de Medline, Bireme y Lilacs Scielo. Las referencias revisadas fueron básicamente normas de ISO, ICONTEC, normas del Ministerio del Trabajo de Colombia, así como referencias de normas españolas. Para el motor de búsqueda de la información, se utilizaron las palabras claves: ergonomía ambiental, iluminación, sistemas de iluminación, luminotecnica, confort térmico, trabajadores de oficina y pantallas de visualización de datos. Las referencias, se hicieron con criterios de una clasificación al ser revisadas y analizadas como calificación media y baja; la mayoría de los estudios fueron exploratorios, descriptivos y analíticos. Se procedió a analizar cada documento a través de fichas con su respectiva información del título, año, autor, país y editorial. El método para el estudio fue analítico ya que se procedió al análisis documental y la sistematización de las referencias con su respectivo análisis.

CONCLUSIONES

En los estudios generalmente el 50% de los usuarios de PVD, experimentan síntomas de la visión. De hecho, la fatiga visual es mucho más común que las lesiones músculo-esqueléticas. Las investigaciones realizadas dicen que no se han encontrado efectos permanentes en la visión por el uso de computadores. Sin embargo, la fatiga visual puede reducir el rendimiento en los trabajadores. Las recomendaciones puntuales para puestos de trabajo con pantallas de visualización de datos, deben ser precisas para mejorar las condiciones de la visión e iluminación y los aspectos termo higrométricas para las diferentes aéreas de trabajo en oficinas. La iluminación es una de las causas que influyen de modo significativo en el daño ocular. Los niveles recomendados de iluminación oscilan entre los 300 y los 500 lux, aunque para las oficinas varían desde 150 hasta 300 lux. Una errónea distribución de luminancias en el campo visual provocaría deslumbramientos que traen consigo fatiga ocular. Estos deslumbramientos pueden ser provocados por una posición incorrecta del mobiliario de la oficina.

La temperatura y humedad también deben ser vigiladas y monitoreadas de manera muy especial. Se sugiere que se trabaje con intervalos entre 19°C y 24°C con una humedad relativa entre el 40% y 70%, mucho más efectiva si se mantiene entre el 55% y 65%. Es importante recordar que estas variables cuando están en valores muy bajos producen sequedad ocular. Por el contrario, si se registran por encima de los valores recomendados, producen falta de concentración en las labores que se estén realizando.

Si reducimos los problemas derivados de las pantallas de visualización y hacemos los puestos más acordes con las capacidades del ser humano y su interacción con el ambiente, pantalla, teclado, silla y planos de trabajo, por inferencia también disminuirán las quejas de los trabajadores y se incrementará la eficacia, la calidad, productividad, el confort y bienestar. Finalmente, en Colombia, por encontrarse en una región con diferentes ambientes de calor, frío, humedad y lluvia, se deben estudiar las condiciones termo higrométricas para la población trabajadora de pantallas de visualización de datos y diseñar criterios propios del entorno ambiental para los espacios de trabajo. Los niveles de iluminación y el confort térmico para oficinas deben ser evaluados para cada tipo de tarea y tomar como referentes las normas nacionales e internacionales.

REFERENCIAS

- Castillo M., J. A., Ramírez, C., B. A. (2009). El análisis multifactorial del trabajo estático y repetitivo. Estudio del trabajo en actividades de servicio. *Revista Ciencias de la Salud*. 7(1):65-82.
- Cortés, J. (2002). *Seguridad e Higiene del trabajo*. México, D.F.: Alfaomega.
- De Pablo, C. (2007). *Manual de ergonomía: incrementar la calidad de vida en el trabajo*. España: Formación Alcalá.
- Diccionario de la Lengua Española. (2001). Madrid, España: Talleres de Rotapapel.
- Dirección de seguridad e higiene. (2005). *Confort térmico*. España.
- Forte, T. (2005). *Pantallas de visualización de datos*. España: Díaz de Santos.
- Instituto Nacional de Seguridad e Higiene del Trabajo. (2007). *Confort térmico*. España.
- Lillo, J. (2000). *Ergonomía evaluación y diseño del entorno visual*. España: Alianza.
- Llaneza, F. (2007). *Ergonomía y psicología aplicada: Manual para la formación del especialista*. Madrid: Editorial Lex. Nova.
- McCormick, E. (1980). *Ergonomía*. España: Editorial Gustavo, Gili.
- Ministerio del trabajo y Seguridad Social. (s/f). *Reglamento Técnico de Higiene Industrial. Iluminación*. Ministerio del Trabajo y Seguridad Social. Bogotá, D.C.
- Ministerio de la Protección Social. (2011). *Guía técnica para el análisis de exposición a factores de riesgo ocupacional*. Bogotá, D.C.: Imprenta Nacional de Colombia.

- Mondelo, Gregori, De Pedro & Gómez (2002). *Ergonomía 4. El trabajo de oficinas*. México, D.F.: Alfaomega.
- Page, Álvaro. (s/f). *Pantallas de visualización de datos*. Madrid, España: Instituto de Biomecánica de Valencia.
- Ramos, J. (2006). *Pantallas de visualización de datos*. España: Editorial MASSON.
- Rey, P. & Jean Jacques. (s/f). *Problemas oculares y visuales*. Enciclopedia de Salud y Seguridad en el Trabajo.
- Silva, E. Y. Benavides & C. Contreras. (2011). *Ergonomía en las aulas*. Chile: Universidad de Chile.
- Varela, M. (2006). La oficina saludable: como crear espacios de trabajos ergonómicos. *Revista Práctica de Riesgos Laborales*. (26):1-34.
- OIT. Farras, J. (2001). *Enciclopedia de salud y seguridad en el trabajo*. Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales. Madrid.
- Taboada, J. (1979). *Manual de Luminotécnica*. España: Editorial Dossat.
- Riva, M., Piergiovanni, Schiraldi, L. & Schiraldi, A. (2001). Actuaciones de indicadores de tiempo-temperatura en el estudio de la exposición a la temperatura de los alimentos frescos envasados. *Tecnologías de Envasado y Ciencia* **14**(1):1-39 doi: 10.1002/pts.521

Otros:

<http://dx.doi.org/10.1002/pts.521>

http://www.testo.com.ar/detalles_productos/0572+1844+01/testo-184-T4

http://www.testo.com.ar/es/home/productos/data_loggers_y_sistemas_de_monitoreo/data_loggers/temperatura_1/dataloggers_temperatura.jsp

<http://www.extech.es>

http://www.extech.com/instruments/resources/manuals/HD450_UMsp.pdf

<http://www.extech.es/luxometros.htm>

Manual del usuario **Modelo HD450**

Registrador de datos - Wikipedia, la enciclopedia libre [es.wikipedia.org/wiki/Registrador de datos](http://es.wikipedia.org/wiki/Registrador_de_datos).

INNOVACIÓN, TECNOLOGÍA Y CONOCIMIENTO

“Ingredientes para impulsar el desarrollo sostenible en el país”

ADRIANA DÍAZ*

Recibido: mayo 5 de 2014 / Aceptado: junio 23 de 2014

RESUMEN

La innovación es ahora, una necesidad de todas las organizaciones para poder ser competitivas en los mercados, que cada vez nos exigen esa inmersión en los Océanos Azules, como lo expone W. Cham Kim/ Reneé Maubogne en su libro "La estrategia del Océano Azul", en éste claramente se enuncia la importancia de aplicar una lógica estratégica diferente, a la que denominan "Innovación en valor" y que ocurre cuando las organizaciones logran alinear la innovación con la utilidad, el precio y el costo.

Cabe señalar que, cada vez que aparecen más empresas en el mercado, las posibilidades de crecimiento y de obtener beneficios disminuye, lo que nos hace buscar nuevos mercados, que permitan crear y capturar nueva demanda, por medio de la innovación al valor, con el objeto de disminuir costos y elevar el valor de los productos y/o servicios; al lograr esto, se generan oportunidades de crecimiento rentable y sostenible a largo plazo, que es finalmente lo que se pretende en toda organización.

Puede afirmarse que la innovación, va de la mano con el cliente; hoy en día se habla en la gestión en innovación, de la hibridación entre el cliente y la empresa, donde el cliente pasa a formar parte de la creación tanto de productos como del portafolio de las mismas. Es lo que conocemos como la co-creación, el cliente es quien ayuda a diseñar el producto ideal que satisfaga sus necesidades, y quien mejor para definirlo que el mismo cliente que es quien lo va adquirir y a necesitar.

En este artículo se habla principalmente de contribuir desde las aulas universitarias y las industrias, en el desarrollo del país, a través de mecanismos y actividades pedagógicas que permitan desarrollar el aprendizaje basado en la innovación; aplicado a los ingenieros que hoy se forman en todas las áreas que trae esta disciplina, como es principalmente, Ingeniería Industrial.

Palabras clave: mercado, crecimiento, innovación, industria y desarrollo sostenible.

ABSTRACT

Innovation is now a need for all organizations to be competitive in the markets, which increasingly requiring that dive in the Blue Ocean, as discussed by W. Cham Kim / Renee Maubogne in his book "Blue Ocean Strategy value Innovation "and occurs

* Ingeniera Industrial, Magister en Docencia, Docente investigador Corporación Universitaria Republicana.

when organizations fail to align innovation with utility, price and cost," it clearly on the importance of applying a different strategic logic, which are called states.

Note that whenever companies appear on the market, the possibilities of growth and profit decreases, which makes us seek new markets that create and capture new demand through the value innovation, with order to reduce costs and increase the value of the goods and / or services; to accomplish this, opportunities for profitable and sustainable growth in the long term are generated, which is ultimately what is intended in any organization.

It can be argued that innovation goes hand in hand with the client; spoken today in the management of innovation, hybridization between the client and the company where the customer becomes part of the creation of both products and the same portfolio. It is what is known as the co-creation, the customer is who helps design the ideal product that fits your needs, and who better to define the same customer who is who is going to purchase and need.

This article is concerned mainly with help from university classrooms and industries in the country's development through educational activities and mechanisms allowing the development of innovation-based learning; applied to engineers today are formed in all areas bringing this discipline, as is mainly Industrial Engineering.

Key words: market growth, innovation, industry and sustainable development.

Estos factores son cruciales en el crecimiento económico y la competitividad de un país, son la evidencia de la globalización. Por consiguiente, "la búsqueda activa de nuevas oportunidades ha creado una necesidad urgente de innovaciones científicas, tecnológicas y educativas que permitan ajustarse a las políticas y prácticas tanto empresariales como gubernamentales" (UNCTAD, 1999). A lo que podemos agregar que el desarrollo del aprendizaje basado en la innovación y currículo puede fortalecer el desarrollo sostenible del país.

En estos tiempos se habla en las empresas de la gestión de la innovación, como una exigencia constante del mercado, es decir, la innovación debe ser continua, ya que genera cada vez ciclos muchos más cortos para lanzar nuevos productos y servicios; y debe ser dirigida hacia una sociedad día a día más compleja, donde los clientes son más sofisticados y fragmentados, y la competencia se mide a escala global. Lo que quiere decir, que si las empresas hoy en día, no son capaces de innovar al ritmo del mercado, dejarán de ser competitivas y tenderán a desaparecer, por lo que se trata de innovar o "morir".

Para entender mejor, partiremos del concepto de innovación de Steven Ballmer de CEO de Microsoft: "innovación es el diseño, invención, desarrollo, y/o implementación de productos, servicios, procesos, sistemas, estructuras organizacionales, o modelos de negocio, nuevos o modificados, con el propósito de crear un nuevo valor para los consumidores y un retorno financiero para la empresa". Esta definición recoge todo lo que abarca la innovación, y no como el concepto que se tiene general, de que innovar solo es crear nuevos productos,

olvidándose de todos los demás elementos que se deben estimar en las organizaciones para la competitividad, productividad y el éxito de las mismas.

A este propósito, si hablamos de una fórmula para innovar: Idea + valor = resultados; pero esta ecuación, al no llevarse de la mano con un liderazgo coherente, y que apueste a la cooperación de toda la cadena de suministros, así como, a la retroalimentación continua y sistemática; colapsaría de una manera catastrófica de inmediato, por la sencilla razón de no involucrar a todas las partes relacionadas en la explotación del negocio, y también, de nuevos negocios.

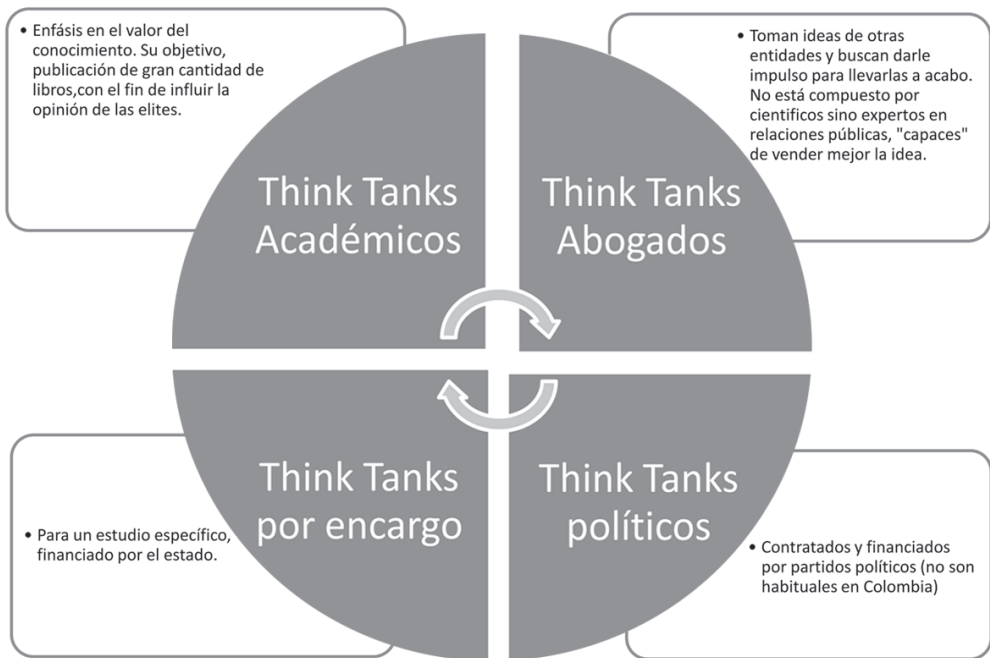
Cuando se contextualiza la innovación, tenemos que pensar necesariamente en los desafíos que trae la globalización para los países, ya que están obligados a fomentar nuevas habilidades, además de desarrollarlas para capacitar a sus ciudadanos. De acuerdo con Edgar y Grant (2009), quienes definen la innovación como la necesidad de impulsar niveles novedosos de procesos y productos agregando ciertas variables definitivas y avanzadas, como por ejemplo, el tiempo de entrega que se requiere para desarrollar o introducir nuevos productos, o la velocidad asociada a la temprana adopción de nuevas tecnologías. Es así como la innovación nos lleva a incorporar el conocimiento, tecnología, aprendizaje e industria, convirtiéndose en una fuente de investigación, que satisface las necesidades de una sociedad, y apuntando siempre a la responsabilidad social y preservación del medio ambiente, que son temas centrales cuando se habla de desarrollo sostenible en cualquier nación.

Al afirmar que la innovación parte de una idea, a la que se le agrega un valor, traigo a colación la frase de Linus Pauling (1962): "*La única manera de tener buenas ideas es tener muchas ideas*", y tenía mucha razón este novel de química y de la paz, ya que innovar no se hace de la noche a la mañana ni es un acto de suerte, como piensan muchos; sino que existen métodos para desarrollar y estimular la generación de ideas tanto en grupo (brainstorming, watering holes, composición de híbridos, etc.) o de manera individual. Por lo que se puede decir que la innovación se construye a través del conocimiento, el saber de los elementos del entorno, y cómo se pueden relacionar y amoldar estos elementos.

La generación de ideas requiere una metodología a la hora de explorar el mercado, ya que son muy pocos los que acaban materializando las ideas. Desde la academia se puede pensar en estrategias extracurriculares para la enseñanza de la innovación. El papel de la educación superior dentro de esta dinámica innovadora es esencial, ya que es el enlace natural con el mundo global, por lo que se deben implementar procesos continuos de innovación que respondan a las demandas educativas que surgen de los cambios sociales, económicos, laborales, científicos y tecnológicos, y a los retos que se va enfrentando el desarrollo del país. Ciertamente, la investigación como

elemento detonador y constitutivo del desarrollo ha ido cobrando fuerza y se ha convertido en el importante elemento de competitividad.

Del mismo modo, al hablar de la generación de ideas innovadoras debemos mencionar los sistemas THINK TANKS, comúnmente llamados en español *tanque de pensamiento o fábrica de ideas*, tiene su origen en Estados Unidos de América (1831); inicialmente se llamaron “Brain Box” (caja de cerebros). Este es un grupo de científicos de distintas áreas, que se dedican a investigar una problemática específica generando nuevas sinergias y nuevos enfoques a las posibles soluciones y acciones a seguir. Se identifican cuatro grandes grupos de THINK TANK:



La mayor crítica que reciben en la actualidad los “THINKS TANS”, es que no suelen ser imparciales al ser financiados para lograr ciertos resultados, además de influenciar a la ciudadanía y a las políticas del país. Para ilustrar mejor el concepto o mejor dicho la concepción de los Think Tanks, me remito a la frase “No se financian verdades, sino organizaciones que se esfuerzan en determinar e investigar con mayor o menor éxito verdades o bien, falsedades” (Niklas Luhmann, 1975), que nos permite direccionar o entender la verdadera filosofía en que se basan estos generadores de ideas.

Se puede considerar que para lograr la sostenibilidad y satisfacer las demandas de la sociedad del conocimiento tanto a nivel global como local, es fundamental que "el aprendizaje, la investigación y la innovación, se conecten estrechamente en el marco de los sistemas educativos, específicamente en la enseñanza superior" (CMES, 2009). Con relación a esto, actualmente en Latinoamérica existe el proyecto KICKSTART, que se enfoca al estudio de particularidades que se presenten en el entorno con relación a la innovación; este grupo está integrado por nueve instituciones de educación superior de diversos países de América Latina y Europa. KICKSTART busca consolidar una red de cooperación e intercambio de nuevas prácticas que coadyuven en la formación de profesionales capaces de impulsar nuevos procesos para la administración de la innovación, con el propósito de mejorar la calidad de la educación superior a través de herramientas, estrategias y acciones que permitan fortalecer los programas académicos como las actividades extracurriculares propuestas para la formación con enfoque innovador.

Pese a la importancia de la formación universitaria entorno a la innovación, a donde se han apuntado políticas o normatividades que requieran impulsar programas de competitividad y planes de desarrollo, en las instituciones de educación superior aún no se ha logrado estrategias para la enseñanza -aprendizaje de la innovación-, solo se han implementado ajustes a los contenidos académicos que apuntan más a la formación disciplinaria de los programas que al desarrollo de la innovación. Para desarrollar la innovación desde las aulas universitarias es necesario "trascender el dominio cognitivo de las disciplinas que faciliten la adquisición de técnicas, competencias y capacidades de comunicación, creatividad y análisis crítico, pensamiento independiente y trabajo en equipo en contextos multiculturales, donde se necesita desarrollar la creatividad para combinar el saber y los conocimientos locales y tradicionales con las ciencias y las tecnologías avanzadas" (Mateos, Anderson, 2010).

Lo que nos interesa aquí no es tanto las actividades curriculares que se establezcan, para incorporar el proceso de innovación en la educación, sino fortalecer la relación Universidad - Empresa - Comunidad, a través de la investigación aplicada, que permitirá comprender lo que la universidad hace y entiende en cuanto a creatividad, innovación y emprendimiento, así como priorizar las oportunidades de mejoras, de acuerdo a la generación y/o creación de valor en los estudiantes.

Un ejemplo claro de esto, son las actividades académicas que se pueden realizar en la Universidad, para despertar el espíritu innovador en los estudiantes, específicamente en ingeniería que es el tema que nos compete ahora. Estas estrategias para la enseñanza de la innovación, deben incluir metodologías

en las que intervienen los distintos actores y grupos de interés, tales como: empresarios, gremios de profesionales, graduados, estudiantes, autoridades, entre otros. Con el fin de llegar a actividades que no están explícitas en el plan de estudios.

El interés por la innovación se puede desarrollar entonces, desde las aulas universitarias a través de algunas actividades tales como:

Actividades académicas que despiertan el espíritu innovador en los estudiantes

Ferias de emprendimiento	Espacios donde los estudiantes den a conocer sus ideas de negocios creativas y/o innovadoras y Merchandising; todo esto bajo un proceso de motivación e investigación muy estricta.
Ferias tecnológicas	El objetivo debe ser de incentivar a los estudiantes, de las áreas tecnológicas a desarrollar, en el seno de algunas materias, propuestas tecnológicas innovadoras o creativas las cuales deben dar solución a un problema real identificado en la comunidad empresarial.
Ciclo de conferencias	El tema central debe ser la innovación y el emprendimiento, y el objeto, motivar a través de testimonios y vivencias reales, charlas, conferencias magistrales, acciones de emprendimiento, para así incentivar la implementación o desarrollo de Planes de Negocios de las ideas innovadoras o creativas de los estudiantes.
Rueda de negocios	Presentar a la comunidad ideas de negocios validadas como tales, para encontrar aliados o socios estratégicos, que permitan sortear el obstáculo del financiamiento y llevar a la práctica, propuestas empresariales.
Centro de consultoría y asesoramiento empresarial	Brindar asistencia al sector empresarial en las áreas de consultoría, asesoría, orientación y gestión, servicios de promoción, organización de seminarios y congresos, así como capacitación personalizada. Esto se logra con alianzas y convenios con otras instituciones de nivel local, nacional e internacional.

Centro de emprendimiento Promover el desarrollo de la creatividad, la innovación y el emprendimiento de estudiantes, con miras de establecer un ambiente ideal para la creación de empresas.

Incubadora de empresa Propone impulsar el talento de personas emprendedoras que son agentes de cambio dentro de la sociedad que necesita de otros agentes.

Centro internacional de innovación Busca coadyuvar al desarrollo multidisciplinario de la sociedad a través de la innovación, con el fin de elevar los niveles de competitividad internacional. La idea es sistematizar, consolidar y centralizar las actividades de asesoramiento y capacitación a empresas, docentes, estudiantes y la comunidad en general.

Elaborada por el autor.

Lo verdaderamente importante de las actividades anteriormente mencionadas, es la focalización de la investigación, que implica darle forma y contenido a cada una de las áreas estratégicas de investigación mediante la identificación de disciplinas dentro de cada una de ellas. Así se logra una mejor utilización de los recursos humanos, físicos y financieros a la vez que un mayor beneficio para la sociedad y una mayor continuidad. Para ello, se seleccionan temas científicos para las disciplinas correspondientes a fin de desarrollarlos a través de líneas y proyectos de investigación (Cantú y Moreira, 2009).

Para simplificar, podríamos decir, que la innovación consiste en transformar ideas en nuevos productos, que una sociedad considere de valor generando resultados para mantener este ciclo de manera sostenible. Para lograrlo se deben considerar tres elementos esenciales, que son: *el diseño* (controlando lo que hace la competencia), *las operaciones* (involucrando nuevas tecnologías limpias) y *el cliente* (quien es finalmente quien le da la aprobación al nuevo producto o servicio).

Parte importante de la innovación, que hoy en día se maneja y se habla en las empresas, es la **co-creación**, que no es más que la hibridación en el proceso de innovar, es decir, invita a tener en cuenta, a escuchar la opinión del consumidor, donde él interviene y hace parte fundamental en el desarrollo y creación de los nuevos productos. Involucrándolo activamente, mientras se coloca

en marcha la propuesta. Cuando el consumidor es tenido en cuenta para el diseño de los productos que va a consumir, también se vuelve parte fundamental para decidir cuánto estaría dispuesto a pagar por él, teniendo en cuenta que satisface todas los requerimientos, gustos y necesidades para su uso, por lo que lo adquirirá sin ninguna duda, sin importar el precio que debe pagar por él.

Grandes empresas que tienen entre su filosofía, innovar a través de la co-creación, están: *Lego* en Estados Unidos, que permite a su cliente diseñar un modelo digital del objeto que quieren construir gracias al programa Digital Designer, para después enviarle directamente una bolsita con las piezas que precisa para construirlo. Y estas construcciones de autor están luego disponibles en la web de la empresa para que otros clientes las adquieran. Es una forma ágil de aumentar el catálogo, usando al cliente como fuente de modelos. Cabe mencionar otras empresas que aplican la co-creación en la innovación, están: *Toyota*, *Google*, *Nike*. En Colombia un ejemplo claro es *Super Ricas*, donde son los clientes los que definen los productos y sabores que esperan probar en sus productos.

BIBLIOGRAFÍA

- Cham Kim W., R. Mauborgne (2005). *La estrategia del Océano Azul*. Harvard Business School Press.
- Mateos A., A. Marck, Rodríguez JM. (2009). *Nuevas formas de enseñar innovación*. España: Amarú Ediciones Salamanca.
- Comella Solans, A. (2011). *Creatividad e innovación empresarial*. ISBN 978-958-8570-50-1.
- Sánchez, R. (1987). *Dimensiones antropométricas y controles de calidad*. La Habana, Cuba: Instituto de Medicina.

EL MATERIAL CONCRETO Y EL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO: Una manera de construir el algoritmo de la multiplicación

JOHN EDISON CASTAÑO GIRALDO*

Recibido: mayo de 2014 / Aceptado: junio de 2014

RESUMEN

Por medio de este proyecto se busca describir la secuencia didáctica llevada a cabo por un grupo de profesores interesados en la enseñanza de las matemáticas en un grado segundo de primaria y por medio del uso del material concreto para la enseñanza del algoritmo de la multiplicación. Se describirá paso a paso la experiencia en el aula y el material utilizado con el fin de mostrar la relación entre los pensamientos numérico y geométrico así como también las ventajas y desventajas del uso del material concreto en la construcción del algoritmo de la multiplicación.

Palabras clave: multiplicación, material concreto, pensamiento numérico, pensamiento geométrico.

ABSTRACT

In this project, we intend to describe the teaching sequence performed by a group of teachers interested in teaching math in second grade and through the use of concrete materials for teaching multiplication algorithm. Experience in the classroom and the material used in order to show the relationship between the numerical and geometric thoughts as well as the advantages and disadvantages of using particular materials in the construction of the multiplication algorithm is described step by step.

Key words: multiplication, concrete material, numerical thinking, geometric thinking.

REFLEXIÓN INICIAL

¿Por qué, en general, las operaciones básicas son procedimientos tan abstractos? ¿Por qué cuando realizamos la multiplicación, en particular, estamos propiciando un trabajo memorístico? ¿Cómo mostrar la multiplicación como un procedimiento constructivo, del que se tiene un referente concreto?

* Matemático. Docente Investigador, Corporación Universitaria Republicana.

20 cuadrados de color negro del mismo material e igual área utilizados para representar la base y la altura de cada uno de los rectángulos (figura 1).



Figura 1. Material utilizado para abordar el algoritmo de la multiplicación

¿CÓMO SE ESTÁ HACIENDO?

La secuencia utilizada para abordar el algoritmo de la multiplicación fue la siguiente:

1. Construir rectángulos con los cuadrados grises dando las indicaciones de la base y la altura correspondientes. Los estudiantes respondían a preguntas como:

¿Cuántos cuadrados grises son necesarios para construir un rectángulo que tenga 3 cuadrados de base y 10 cuadrados de altura?

Para responder este interrogante los niños hacían inicialmente el conteo de cuadrados grises y expresaban la respuesta (figura 2).

2. Al igual que el anterior ítem, los estudiantes construían los rectángulos y daban respuesta a preguntas de la misma estructura, la diferencia era que ellos por sí mismos identificaron que cada fila tenía la misma cantidad de cuadrados grises, por lo tanto, escribían en frente de cada una el número de cuadrados grises y luego usaban la suma para encontrar el total de cuadrados que formaban el rectángulo. Para este caso: $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 30$.
3. Se realizó la transición entre el material concreto al lenguaje simbólico utilizando la palabra veces, la cual permitió dotar de sentido el significado



Figura 2. Estudiante utilizando el material concreto

de la multiplicación por medio de la reiteración (10 veces el número 3 es igual a 30).

- Finalmente se dio el paso de representar en el cuaderno arreglos de puntos en vez de usar los cuadrados grises utilizados en la parte inicial, esto con el fin de agilizar el proceso además de permitir el cambio de la palabra veces por el signo por (figura 3).

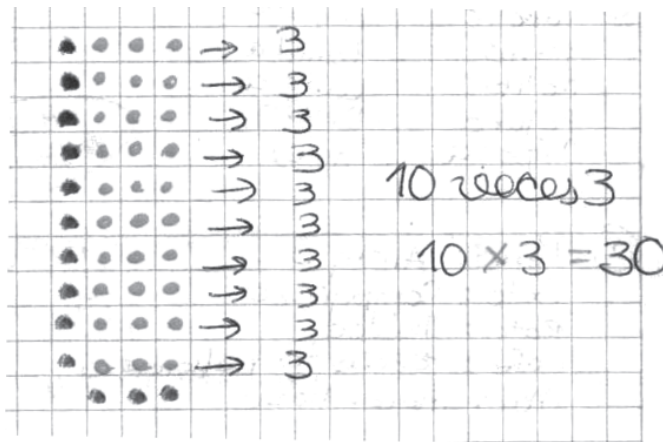


Figura 3. Representación de un estudiante del algoritmo por arreglos rectangulares.

LOGROS Y DIFICULTADES, EVIDENCIADAS

Logros:

- Permitir en los estudiantes la exploración con material concreto para dar sentido al algoritmo de la multiplicación utilizando la noción de reiteración.

- Involucrar el pensamiento métrico y geométrico con el algoritmo de la multiplicación (cálculo de áreas de rectángulos y cuadrados).
- Lograr la comprensión autónoma por parte de los estudiantes de la propiedad conmutativa de la multiplicación.
- Potenciar la capacidad motriz de los estudiantes al momento de formar los rectángulos con el material concreto simultáneamente con el conteo mental realizado.
- Establecer relaciones entre la multiplicación y la construcción de arreglos rectangulares, posibilitando asociar el pensamiento numérico con el pensamiento geométrico.
- Caracterización entre los rectángulos y los cuadrados.

Dificultades:

- Manejo del material por sus dimensiones mínimas.
- Falta de dominio del pensamiento geométrico (caracterización de polígonos) y métrico (área de polígonos).
- Falta de apoyo por parte de los padres de familia, ya que como lo plantea Camargo, Diez & Pantano (2012), el aprendizaje tradicional impartido desde casa “puede revertir o ralentizar el proceso de desarrollo del pensamiento matemático que los niños han ganado naturalmente a partir de la necesidad”.

REFLEXIÓN FINAL

En general, el acercamiento a la multiplicación a través de un modelo geométrico como es la construcción de arreglos rectangulares, ha generado dos habilidades: en primer lugar, los estudiantes dotaron de sentido la multiplicación como una abreviación de la suma dado que, al realizar inicialmente un conteo estratégico para encontrar el área del rectángulo, notaron que cada fila o columna tenía la misma cantidad de cuadrados grises, logrando así que se utilizara la adición como estrategia para encontrar la cantidad de cuadrados que conformaban el rectángulo, es decir, el área de este. En segundo lugar, al tener los estudiantes un referente concreto, identificar no solamente el producto de dos cantidades de un solo dígito sino que lograron

también hallar alguno de los factores (base o altura) dándoles cómo insumos el área del rectángulo y alguno de sus lado.

Podemos por lo tanto, recomendar trabajar la operación de multiplicación de una forma más natural, como se propone en esta experiencia de aula.

REFERENCIAS

- Camargo, S., Díez, C., & Pantano, O. (2012). *El desarrollo del pensamiento matemático en la primera infancia. Método para el Aprendizaje Natural de las Matemáticas*. Bogotá: Fundación para el Desarrollo Educativo y Pedagógico.
- Chamorro, C., Belmonte, J., Ruíz, M. & Vecino, F. (2005). *Didáctica de las matemáticas para educación preescolar*. Madrid: Pearson.
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Magisterio.
- Roa, R. (2001). Algoritmos de cálculo. En: Castro, E. (Ed.). *Didáctica de las matemáticas en la educación primaria*. pp. 231- 254. Madrid: Síntesis.

ALAN TURING, SU OBRA Y LOS EFECTOS SOBRE LA CALCULABILIDAD

MAGDALENA PRADILLA RUEDA¹

Recibido: mayo de 2014 / Aceptado: junio de 2014

RESUMEN

Este artículo presenta una visión general de los temas de investigación de Alan Turing, centrado en los desarrollos y aportes a la *Teoría de la Calculabilidad*. Basándose en los lineamientos sobre el *problema de la decisión* (*Entscheidungs problem*) de D. Hilbert y con el fin de dar una respuesta a la pregunta: ¿la Axiomática formal cuenta con un método efectivo para decidir que una fórmula puede ser verdadera o falsa?, Turing responde con una negativa por medio de un método *mecanicista* llamado la *máquina de Turing*, que prueba la *indecidibilidad* de la Axiomática y presenta las bases de la *Calculabilidad*, y posteriormente la de la *Informática*.

Palabras clave: Alan Turing, calculabilidad, decidibilidad, informática, máquina de Turing.

RESUMEN

This article presents an overview of the subjects of research of Alan Turing, focused on the developments and contributions to the theory of calculability. Based on the guidelines on the issue of D. Hilbert's the problem decision (*Entscheidungs problem*) and in order to give an answer to the question: the axiomatic formal account with an effective method for deciding that a formula can be true or false?, Turing responds with a negative using the mechanistic method called the Turing machine, which tests the undecidability of the Axiomatica and presents the bases of the calculability and subsequently the computer.

Key words: Alan Turing, calculability, decidability, computer science, Turing machine.

1. INTRODUCCIÓN

Alan Mathison Turing (1912-1954), matemático inglés, estudia en Cambridge (Inglaterra). A los 24 años, en una tentativa de describir matemáticamente la esencia del acto de calcular, a partir de este análisis, trata de reconstruir el funcionamiento del pensamiento. Así, Turing proyecta su sistema científico

1 Doctor en Informática y Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales, Universidad de Grenoble (Francia), 1983. Doctor en Filosofía, Universidad París 1 - Panthéon Sorbonne, 2008. Actualmente docente investigadora de la Corporación Universitaria Republicana, Bogotá.

teniendo como horizonte la posibilidad de la reconstrucción mental y física del hombre, donde muestra su interés interdisciplinario entrelazando las matemáticas y lógica con la biología. Igualmente, investiga sobre los desarrollos en la Matemática, centrados tanto en el cálculo de probabilidades y estadísticas (curvas, y sus límites), en la distribución de los sistemas numéricos (paradoja entre la dimensión discreta y la continua y su aproximación numérica) como en la teoría de grupos, donde la *función* se torna en objeto de estudio por su solidez estructural entre esta y el dominio de resolución, en un grupo dado.

Así mismo, sus investigaciones se ven relacionadas con la descodificación de mensajes secretos, utilizando métodos probabilísticos novedosos que dan un impulso a la ciencia de la Criptología, donde reinventa, un método de *análisis secuencial* y el concepto de *Información*.

En *Lógica Matemática*, bajo los resultados de Gödel y los lineamientos del Programa de Hilbert plantea las bases de la decidibilidad, la calculabilidad y la construcción de los primeros computadores. En su investigación de 1936, sobre la indecidibilidad, precisa la noción de *cálculo efectivo*, a partir del concepto de *número calculable* y su aplicación al *problema de la decisión* que da las bases de la *Teoría de la Calculabilidad*, donde aclara la pregunta sobre los procesos necesarios para realizar cálculos, y allí va a definir la noción de función, de cálculo y como resultado el de *función calculable*, con la cual modifica profundamente las fronteras entre los dominios del saber y la manera de analizar y producir resultados.

2. EJES DE INVESTIGACIÓN DE TURING

Turing se interesa en una serie de temas variados, siendo ya estudiante de colegio, lo que vaticina el desarrollo de aspectos preponderantes de interés científico. Sus obras más importantes, que reflejan estos intereses y que según J. Lassègue (1998, p. 17), al ponerlos en perspectiva, Turing construye su proyecto científico integral presentando la posibilidad de la reconstrucción física y mental del ser humano, lo que es valioso en un científico matemático.

De esta manera, sus obras síntesis son:

- "*On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem*". 1936: En esta obra funda la teoría lógica de la calculabilidad que se basa en el concepto de "máquina de Turing". El escrito plantea las bases teóricas de uno de los fenómenos científicos y técnicos más importantes de la segunda mitad del s. XX: la estructuración de la calculabilidad, que lleva a la constitución de la Informática teórica y la realización del computador.

- “*The chemical basis of morphogenesis*”. 1952: Aquí, plantea las bases de una teoría general de la *morfogénesis* que tiene como objetivo presentar las diferentes formas existentes en la organización de los seres vivos. Esta teoría estudia las reacciones químicas en el seno del organismo por medio de una modelización matemática seguida de una simulación informática.
- “*Computing Machinery and Intelligence*”. 1950. Establece la relación entre dos temas de investigación: lógica y biología, aparentemente lejanos, pero que Turing logra presentar de una forma coherente. Esta obra es más filosófica que matemática, propone el estudio de los procesos cognitivos y del lenguaje por simulación informática, base de lo que se llamaría, *Inteligencia Artificial*.

Anotaciones

Así, se puede decir que en el artículo de 1950, Turing establece un lazo científico entre los temas de los otros dos, lógica y biología. Se trata, en el caso de la biología, de determinar formalmente, las causas químicas responsables de la constitución de las formas biológicas, y en el caso del estudio del pensamiento, de presentar las causas del *pensamiento inteligente* de una manera formal. Estas tres investigaciones las realiza en un periodo de 20 años de 1935 a 1954.

Igualmente, su aporte base en el saber matemático es la articulación de investigaciones con importantes resultados, sobre temas diferentes, tales como:

- *Matemáticas*, centradas en el cálculo de probabilidades y estadísticas, la teoría de números y la teoría de grupos.
- *Lógica matemática*, que plantea las bases de la decidibilidad, la calculabilidad y la construcción de los primeros computadores, a partir de los aportes de los desarrollos en lógica.
- *Criptología*, que comienza con descifrar los códigos de los mensajes alemanes y continúa hasta el desarrollo del computador.

2.1 Matemáticas

Cálculo de probabilidades

La noción de “curva normal” (*curva en campana* o *gaussiana*, que permite dar cuenta de las regularidades estadísticas y representa las variaciones de

la función: $y = e^{-x^2}$). Es estudiada por Turing en 1933. Su interés se centra en el manejo metodológico de esta curva porque posee propiedades como la densidad, continuidad y simetría que la hacen de fácil manejo, como en el estudio de las distribuciones de muestras, las estimaciones e inclusive en las pruebas.

En ese sentido, el “teorema central del límite” es de gran importancia, porque en el caso del estudio de las regularidades que tocan los fenómenos naturales (como los de la física) la utilización de esta curva es menos directa, debido a que la ley que controla el comportamiento de esta *variable aleatoria*, es raramente normal cuando se le asocia al fenómeno en cuestión. El “teorema central de límite” permite aproximar la ley a la suma de n variables aleatorias independientes, integrando así, la ley normal a las ciencias de la naturaleza.

Como resultado de la investigación, Turing presenta una nueva demostración de este teorema, en febrero de 1934², la primera había sido mostrada en 1922 por el matemático alemán Lindeberg.

Teoría de Números

Los sistemas numéricos presentan un gran interés para Turing, profundizando particularmente en los números primos (indivisibles por ellos mismos y por uno) y en sus propiedades (números de cantidad infinita, que decrecen, es decir, que se presentan en menor cantidad, en tanto que los enteros crecen). La razón matemática que explica su distribución es un problema importante de la teoría de números, pero no existe una fórmula algebraica simple que permita enumerar todos los números primos o de enunciarlos a todos hasta un cierto límite. La importancia radica entonces, en su distribución media, es decir, en un grado de probabilidad donde se pueda encontrar un número primo entre los enteros en general³. De manera que, para Gauss, los números primos se espacian al mismo ritmo que el crecimiento de la función logarítmica (exactamente, el espacio entre dos números primos para n aumenta como el logaritmo natural de n).

Turing se interesa a la *paradoja* resultante de este planteamiento porque pone en relación la distribución de los números primos, que son entidades

2 “On the Gaussian error function”; en *Collected Works of A.M. Turing 1: Pure Mathematics*, Amsterdam, Elsevier Science Publishers, 1992; pp. xix-xx. Citado por Lassègue, 1998, p. 23.

3 Esta disminución de los números primos, había sido investigada por Gauss (siglo XVIII) que encontró el medio de describirla relacionando el aspecto inestable de su distribución y la función logarítmica, que se expresa como una relación entre la progresión geométrica de las potencias de un mismo elemento (por ejemplo, la cadena: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...) y la progresión aritmética de sus potencias (en el ejemplo, $1=20$, $2=21$, $4=22$, $8=23$, ...): medida aproximada y posible de una dimensión continua.

individuales, *discretas* y una función que permite la medida de una dimensión *continua* como la función logarítmica. Es un tema sobre aproximación numérica, tocando la relación entre el aspecto discreto de los números enteros y el aspecto continuo de los números reales. En este mismo sentido, a mitad del siglo XIX, *Riemann*⁴ había demostrado que la distribución de números primos adoptaba una línea general de naturaleza logarítmica con un grado de error muy débil, cuya medida era la “Hipótesis de Riemann”. El problema consistía en mostrar que una cierta función “zeta”, no tomaba el valor cero sino para ciertos puntos que forman una línea recta en el plano compuesto. Sin embargo, la hipótesis según la cual los números primos debían escasearse según una medida relacionada a la función logarítmica, tenía tendencia a sobreestimar la cantidad de números primos.

Pero en Cambridge, por un lado, hacia los años 1910 y 1930, J. E. Littlewood había notado que existían puntos donde, contrariamente a lo que se había previsto, la hipótesis de la sobreestimación era falsa; por otro lado, en 1933, en Cambridge, igualmente, Skewes había mostrado que si la Hipótesis de Riemann era verdadera, debía existir un punto a partir del cual se operaba una subestimación del número extremadamente grande en cuestión⁵.

De esta manera, Turing se confronta en 1939 a la Hipótesis de Riemann (Booker, 2006) y al problema de la sobreestimación de los números primos y evalúa numéricamente la función “zeta”, para un cierto número de valores. Esta vez, Turing plantea un nuevo método “efectivo”, es decir, una máquina de calcular porque los cálculos son demasiado grandes para realizarlos a mano⁶.

Turing realiza varios intentos para calcular la función *efectivamente*, es decir, en diversas máquinas para calcular⁷ y conduce así su cálculo a un valor de la

4 Riemann, en 1859, es nombrado profesor en Gottingen y en la Academia de Ciencias de Berlín, publica el artículo: “Sobre el número de los números primos inferiores a una talla dada”. Aquí, él define la *función zeta*, retomando los trabajos de Euler y los extiende a los números complejos. Utiliza esta función con el objetivo de estudiar la repartición de los números primos. La hipótesis de Riemann sobre los ceros no-triviales de la función zeta, no se ha demostrado todavía y hace parte de los 23 famosos problemas de Hilbert, lo mismo que de los siete problemas del milenio.

5 El número en cuestión sería: 10 a la potencia 10, esta a la potencia 10 y esta a la potencia 14. (Hodges 1983, p. 135).

6 A la época, las máquinas de calcular son de dos tipos: a. máquinas digitales que operan sobre las marcas interpretadas por el ser humano como los números y que se limitan a las cuatro operaciones; b. máquinas analógicas que recrean un análogo físico, basadas sobre una medida de longitudes continuas, de la función matemática de calcular.

7 Primero, una máquina analógica realizada para predecir la altura de las mareas, luego en una máquina especializada en el cálculo de esta función y después de la guerra (junio 1950), cuando el computador que él había ayudado a crear en la Universidad de Manchester se vuelve entonces operacional para este tipo de cálculos.

función superior a 1540^8 . Con el estudio y realización de la función *zeta*, no solamente muestra un nuevo método para calcularla y definirla sino una estructura novedosa para máquina, necesaria tanto para la solución numérica del problema como para la necesidad *efectiva* requerida por la máquina. Considerada esta, como una de las primeras experiencias en la historia de las *máquinas* y de la *informática*.

Teoría de Grupos

El interés de Turing por la *Teoría de Grupos*, que no está focalizada hacia sus dos principales ejes de investigación (sistemas numéricos o efectividad del cálculo), radica en la noción de *función*. En esta teoría, la función se interpreta de manera proyectiva, previendo todas las permutaciones posibles de los valores que una función puede contener. Este estudio abstracto de permutaciones, en un grupo, se vuelve el objeto de estudio general porque va más allá de los números como objetos privilegiados de investigación; por otro lado, desde el punto de vista de la interpretación numérica de la teoría, Turing plantea que la posibilidad de una resolución numérica de una ecuación no es absoluta sino relativa al dominio en la cual se considera⁹.

La solidez estructural entre una función y el dominio de su resolución, dada en la *Teoría de Grupos*, influenciará el itinerario de Turing, por su riqueza de enseñanzas, así:

- La separación entre los números calculables y los no-calculables (1936), que responde a una pregunta estructural: la efectividad del cálculo y no propiamente la de la resolución de ecuaciones en aspectos particulares.
- La prolongación del interés que él tiene sobre la teoría de funciones y en este marco plantea los problemas específicos referidos a las aproximaciones de funciones, en los casos donde aquellas son necesarias.

8 En 1953, publica un nuevo artículo sobre el cálculo de la función *zeta*, donde recuerda que el último matemático que había calculado los valores de esta función, fue el británico E. C. Titchmarsh, en 1936 y que llegaba hasta el número 1468. El artículo: "Some calculations of the Zeta-function" en *Proc. London Mathematics Society* (3) 3, 1953, pp. 99-117.

9 Turing en *Teoría de Grupos* se interesa en mejorar técnicamente un resultado de von Neumann que toca las funciones cuasi-periódicas de un grupo, el va a mostrar la compacidad de un grupo de "unión conexa" cuando es aproximable, preguntándose: ¿en qué medida los grupos llamados "de unión" que son de naturaleza continua, podían ser aproximados por las estructuras discretas como son los grupos finitos? (Turing, 1935: "Equivalence of left and right almost periodicity". En: *J. London Mathematics Society* 10. pp. 284-285).

En 1935, generaliza las investigaciones del algebrista alemán Reinhold Baer sobre las extensiones de un grupo, es decir, sobre los dominios numéricos de resolución de ecuaciones (Turing 1938: "The extensions of a group"; en *Composition Mathematics*. 5, pp. 357-367).

- Las aplicaciones no directamente numéricas de la *Teoría de Grupos* que tocan ciertos aspectos que serían sus temas de interés hasta el final de la vida: la mecánica cuántica y la criptología. En mecánica cuántica, la noción de estado es caracterizada por la *Teoría de Grupos*, mientras que en criptología, permite definir rigurosamente la noción de permutación y de no-variabilidad de las permutaciones.

2.2. Lógica Matemática

Bajo los resultados de Gödel de 1931, en lógica matemática, sobre la decidibilidad y la completitud de los sistemas formales, Turing con su investigación de 1936, sobre la indecidibilidad, va a dilucidar la noción crucial de *cálculo efectivo*, a partir del concepto de *número calculable* y su aplicación al *Problema de la decisión* (*Entscheidungsproblem*) propuesto por D. Hilbert.

Así mismo, realiza una investigación doctoral en Princeton, 1938, a partir de la noción de la que llamaría Gödel: la *incompletitud* de todo sistema formal, investigación cuyo objeto era aclarar y mostrar la posibilidad de ir más allá del *límite interno* propio a cada sistema formal, el cual demuestra que es posible representar aritméticamente.

El desarrollo de esta investigación, la hace presentando una jerarquía de sistemas formales compuestos de proposiciones homogéneas en cuanto a su uso de conectores lógicos (es decir en cuanto al orden en el cual se colocan los conectores existenciales y los universales). En cada sistema formal, agrega una proposición que sea inabordable por el sistema formal de la etapa precedente e incluye igualmente, la proposición que representa la función *zeta* de Riemann¹⁰. Se trata, entonces, de estudiar la *completitud* parcial de cada etapa engendrada por el sistema formal, que puede ser extendida a toda la jerarquía.

Turing presenta un cambio en la metodología utilizada, porque estructura una jerarquía aritmética de grados de insolubilidad que es *relativa al sistema formal considerado*.

2.3 La Criptología¹¹

Objetivos: asegurar la *confidencialidad*, garantizar la *autenticidad* y conservar la *integridad* de informaciones o mensajes codificados o “encriptados”; lo

10 De esta manera, esta función queda clasificada aritméticamente según los grados de insolubilidad, resultado importante en el desarrollo de la función *zeta*.

11 Del griego *κρυπτος* (esconder) y *λογος* (ciencia), “criptología” significa la ciencia del secreto y se propone esconder (encriptar o codificar) las informaciones de un mensaje.

que significa asegurar códigos secretos impenetrables. Esta ciencia nace desde la antigüedad, los hombres inventan sistemas manuales primero y luego se vuelven mecánicos, antes de la revolución electrónica, pero solamente se estructura como disciplina hacia la segunda decena del siglo XX.

En su concepción de la Criptología Turing, representa las leyes del universo por el sistema de codificación con el que se “encriptan” los mensajes y las claves de códigos por sus constantes. Esta concepción pone en relación el mundo abstracto de la lógica, estadísticas, probabilidades y máquinas y el mundo de la física; lo cual engloba todos los temas de su interés.

Este trabajo es realizado durante la segunda guerra, el cual no se conoce actualmente en su integralidad, pero se estima que “sin Turing, Inglaterra hubiera perdido la guerra”. Se pueden distinguir dos periodos en su realización:

- El primer período fue esencialmente consagrado a la descodificación de los mensajes *encriptados* de la marina alemana¹². Turing propone un método que hace uso del cálculo de probabilidades y de la lógica que consistía en la comparación estadística de las frecuencias en las configuraciones “hembras”, reemplazando la búsqueda mecánica de reconocimiento de letras hembras por la búsqueda de las “opuestas” entre las letras repetidas de una palabra, que se supone están en el mensaje, y la repetición del mensaje codificado. Es decir, este método consistía no solamente en operar el reconocimiento mecánico de la repetición de palabras sino en tratar, por métodos lógicos mecánicos, de limitar la proliferación combinatoria, eliminando de entrada las posibilidades incompatibles entre ellas¹³.

Con este método Turing reinventa, de manera original, un método de análisis estadístico, el *análisis secuencial* y el concepto, prioritario en el siglo XX, que es el de *Información*.

12 Los estudios de *descodificación* habían comenzado antes de la segunda guerra por los poloneses, que constituían un grupo de matemáticos especialistas en *teoría de grupos* y en el idioma *alemán*, y un grupo de ingenieros idóneos en construir máquinas para descodificar. Su método llamado del “Reloj”, se centraba en descubrir en los mensajes codificados, repeticiones de letras discernibles llamadas “hembras” (*samiczka* en polonés), búsqueda que se realizaba mecánicamente con la ayuda de máquinas electromecánicas nominadas “Bombas”. La estructura de codificación de los alemanes por su máquina *Enigma* fue descubierta por el estudio de estas repeticiones, en su trabajo de conjunción inédita de la mecanización del mensaje y las competencias matemáticas y lingüísticas; lo cual lleva, igualmente, a una renovación completa de los métodos en Criptología. Después de la pérdida de Polonia, los investigadores poloneses van a Francia y luego a Inglaterra; momento en el cual los alemanes habían complicado sus codificaciones y el método del “Reloj” se vuelve ineficaz (Lassègue, 1998, pp.34-35).

13 Teóricamente, este método había sido propuesto por C.S. Pierce, como un método de Inferencia para la investigación, llamado *abducción*, al lado de los otros dos métodos: *inducción* y *deducción*.

- El *análisis secuencial*¹⁴, entendido como un análisis estadístico donde la talla de la muestra no se fija con anterioridad. Por el contrario, los datos se evalúan a medida que se recolectan y la prueba llega a su fin, según una regla de parada predefinida, cuando los resultados significativos se presentan. De esta manera la conclusión del análisis puede ser presentada en un estadio primario relativo a aquel al que se llegaría a partir de pruebas de hipótesis o estimaciones más clásicas, con un costo financiero o humano inferior.

- La *Información*, noción sintética, transformada (codificada) producida para ser transmitida; fenómeno sobre el cual Norbert Wiener (1962), se había interesado, examinando las máquinas a calcular que eran capaces de imitar e inclusive de substituir el comportamiento humano. La característica principal de transmisión de máquinas y de humanos, era la de “patrón” (*pattern*): en tanto que “arreglo” o “vector”, caracterizado por el orden de sus elementos y no por el contenido mismo de estos (dos modelos son iguales si sus relaciones de estructura se corresponden, en elementos y en orden (p. ej: la manera de contar); o en tanto que distribución temporal, como los mensajes que se intercambian en una conversación telefónica. Es así, que la manera de “medir” la información para hacer las transmisiones va a constituirse en una de sus características importantes. La medida de la información, para Wiener, depende de un principio parecido a aquel de la *entropía*¹⁵, en donde un mensaje puede perder espontáneamente su orden pero no podría obtenerlo¹⁶.

De esta manera, con la introducción de la “medida” de información, el concepto de *información* va a referirse al “peso de la evidencia” de

14 El *Análisis Secuencial* fue concebido por A. Wald, estadístico americano, y G. A. Barnard, británico, para controlar la calidad de productos manufacturados. Para decidir si un lote de productos es de buena calidad o no, sin tener que revisar todos los productos, se tienen dos hipótesis: la una k (productos defectuosos) y la otra $no-k$ (productos no-defectuosos), se prueban los productos y cada vez se recalcula la calidad del lote, sin fijar con anterioridad la talla de la muestra sometida a la prueba de calidad. Cada observación tiene tres acciones relativas a: k es verdad o $no-k$ es verdad u ordenar otra prueba. Se trata de proseguir la prueba hasta un límite sin multiplicar excesivamente el número de pruebas, lo cual lleva a definir una regla de parada para la prueba. La escogencia de productos de la misma calidad puede asimilarse a la aceptación de la hipótesis que se refiere al significado de una palabra contenida en un mensaje, que es el concepto mismo de *Información*.

15 La mecánica estadística utilizaba nociones similares, que en la rama de la Física llevaba al “segundo principio de la termodinámica”, la que afirma que un sistema puede perder espontáneamente el orden y la regularidad pero que no gana casi nunca (WIENER, Norbert, *Ibid*).

16 El estudio de los mensajes y en particular, de los mensajes de control, constituye el objeto de la “Cibernética”, en la época de Wiener. Su nombre significa el arte de controlar o timonear, viene de la palabra griega *γωρνον* “governor” (ingles) que designa el regulador de una máquina y se ha formado por la latinización de esta palabra griega.

los mensajes, que es netamente estadístico, con utilización posterior en probabilística, lo cual es importante para los métodos de descodificación que buscaba Turing. Su problema era conocer la probabilidad de realización de una hipótesis H dada *a priori* y de la información obtenida, que sería la *evidencia* E ; por lo cual es posible revisar por medio de una regla (de Bayes, por ejemplo), la probabilidad buscada. De esta manera la característica de “peso” de información va a permitir conocer las medidas de probabilidad calculadas en términos de semejanzas. El nombre que da Turing a la unidad de medida de Información es *ban* y *deciban* cuyo significado es el de *más pequeño cambio perceptible por la intuición humana*¹⁷.

- En el segundo período, provisto del concepto de información, Turing se centra en la puesta en funcionamiento de un sistema de codificación de la palabra, a partir de los estudios realizados por los ingenieros de los laboratorios Bell especializados en la tecnología electrónica, en particular Claude Shannon, uno de los fundadores de la *teoría de la información*¹⁸, cuyo interés se centraba en la puesta en funcionamiento de máquinas susceptibles de codificar la palabra humana.

3. APORTES DE TURING A LA CALCULABILIDAD

Con los intereses e investigaciones de Turing en Matemáticas, se puede decir que su perspectiva está ligada, la mayoría de los casos, a la *efectividad del cálculo*, es decir, no solamente desde el punto de vista del planteamiento de las problemáticas y de las posibilidades de resolución sino de las condiciones prácticas de su realización, razón por la cual estos desarrollos están ligados a la *lógica matemática*.

17 El nombre *ban* fue dado porque el proyecto sobre el cual trabajaba Turing se llamaba *banburism*, cuyas operaciones y cálculos se hacían sobre papel proveniente de la ciudad inglesa de Banbury. Estas unidades de medida fueron tomadas de la teoría acústica que utilizaba *bel* y *decibel*, y significan el logaritmo de base 10 de la relación entre dos intensidades sonoras. Posteriormente Shannon en su *Teoría de Información* las reemplaza por una noción binaria equivalente, el *bit*. (Lassègue, J. 1998, p. 37)

18 De manera general, la *teoría de la información* es una teoría de naturaleza estadística que mide “la cantidad de información provista por una operación dada”. Además de Turing, se encuentran varios estudiosos de esta teoría, así: de un lado, la teoría de información de Kolmogorov, en general, que se pregunta si se puede deducir la “verdadera información”, a partir de una cadena de *bits* (0, 1), y del otro lado, la teoría de la información de Shannon, más específica que la de Kolmogorov. Se ocupa de las distribuciones particulares probabilísticas de ciertos conjuntos de estas cadenas. Aquí, se utiliza la noción de Turing, porque la medida o el valor del contenido de la información se obtiene por medio de una cierta hipótesis de distribución probabilística de las letras de la cadena, semejante a las investigaciones realizadas por él.

3.1 Entorno Lógico-matemático

El impulso dado a finales del siglo XIX a la lógica está marcado por los *fundamentos de matemáticas*, debido, en gran parte a los descubrimientos de Cantor¹⁹ que tocan la comparación de colecciones (1874) y el desarrollo de la teoría de conjuntos, cuya originalidad radica en la interpretación del concepto de *infinito*. Teoría, cuyo conjunto de *infinitos no-enumerables* presenta antinomias o *paradojas*²⁰, ampliadas también por la deficiencia de los sistemas de deducción de la lógica clásica. Esta presuntamente, utilizaba objetos no totalmente razonados en los dominios finitos y por ende la noción de *infinito*, requería una petición de principio, porque se servía de la extrapolación de los razonamientos del campo del finito (aparentemente válidos) al del infinito de la noción de *sucesión*. En el campo del Infinito se contaba con la diferenciación del infinito *potencial* y el *actual*²¹, sabiendo que solo lo *finito* podía ser accesible al razonamiento y es justamente lo que se muestra con el planteamiento de Cantor sobre los números *transfinitos*, porque establecía las reglas que permitían el manejo de los conjuntos que comprendían estos números (infinitos tratados de una forma finita), es decir las reglas que permitían el control de un *infinito actual*.

19 Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (San Petesburgo 1845-Halle 1918) fue un matemático, filósofo y físico alemán. Tuvo como profesores en el campo de las matemáticas a Ernst Kummer, Karl Weierstrass y Leopole Kronecker. Los primeros trabajos con las series de *Joseph Fourier*, lo llevaron al desarrollo de una teoría de los *números irracionales* y en 1874 apareció su primer trabajo sobre la *Teoría de Conjuntos*, que es la base de las Matemáticas Modernas. Estudia los *conjuntos infinitos*, considerado por su maestro Kronecker como una locura matemática y descubre los *conjuntos infinitos enumerables* (naturales, enteros positivos, ...) y los *conjuntos infinitos no-enumerables* (no tienen correspondencia con los números naturales).

Sus estudios lo llevan a *formalizar* la noción de *infinito* bajo la forma de los *números transfinitos* (cardinales y ordinales). Este planteamiento supone un desafío para la religiosidad de Cantor. Trabaja en probar la *hipótesis del continuo*, cuya prueba se presenta como imposible, y tiene que ser aceptada (o rechazada) como axioma adicional de la teoría, lo que significó un salto cualitativo importante en el raciocinio lógico.

20 Paradojas, que parecían invalidar toda su teoría (*inconsistente* o *contradictoria*, en el sentido de que una cierta propiedad podría ser *a la vez cierta y falsa*). Por ejemplo: “el barbero de un pueblo rasura todas las personas que no se rasuran por sí mismas. Pregunta: ¿El barbero se rasura a sí mismo? El descubrimiento de las paradojas de la teoría cantoriana de conjuntos fue formalizada posteriormente por Gottlob Frege, así mismo propició los trabajos de Bertrand Russell, Ernst Zermelo, Abraham Fraenkel y otros estudiosos a principios del siglo XX.

21 Cantor, define el *infinito potencial* en contraposición al *infinito actual*, nociones que eran conocidas desde la antigüedad, por los griegos. *Anaximandro* (611-547? a. C.) consideraba el Infinito como potencialidad, lo indeterminado, ilimitado, es decir, lo continuo; *Platón* (427-347 a.C.), al contrario se refería al Infinito actual, describiendo la *forma*, el *número*, etc.; en el Medioevo, el infinito es potencial y hace referencia a Dios; y en los desarrollos contemporáneos se encuentran las dos corrientes, así:

- infinito potencial: Conjunto infinito N (naturales), no existe; Conjunto finito si existe $N = \{1, 2, \dots\}$ y es potencialmente infinito.
- infinito actual es exclusivamente para conjuntos operativamente cerrados:
- números naturales (constructivismo): para cada número natural es posible señalar un sucesor por tanto no hay fin: $S0=1$; $SS0=2$. Cada uno de estos números (por grande que sea) puede señalarse en forma completa, mientras que eso no es posible para el conjunto N .
- conjuntos que se pueden definir con base en procedimientos o algoritmos.

La problemática se desplaza hacia la legitimidad de los razonamientos no-constructivos o que no se pudieran establecer por un número finito de pasos y en consecuencia por el estatuto del infinito potencial, el actual y lo finito (objetos o razonamientos). Así, había escuelas que controlaban lo infinito (transfinito) por medios finitos, otros se dieron a la tarea de reinterpretar los medios no-constructivos adquiridos, por medios constructivos, es decir, en ambos casos, se trataba de componer una lógica en el campo de lo finito. La indagación de los lógicos se centra, entonces sobre lo que se puede entender por *razonamiento constructivo*, el cual era, en ese momento, el centro de interés de Turing ligado a sus investigaciones sobre la manera de realizar cálculos.

En el mismo sentido, David Hilbert, plantea una estrategia basada sobre una reformulación de la *axiomática*, que diferenciaba las proposiciones *ideales* de las *reales*. Desde la antigüedad (Euclides), la *Axiomática de la Geometría* estaba compuesta por un grupo de proposiciones (axiomas) que engendraban lógicamente todas las otras proposiciones de este campo y suponía que esta geometría era no-contradictoria. Así, para definir si un grupo de axiomas era legítimo (no-contradictorio), era necesario recurrir a una *representación o modelo* del grupo de axiomas estudiado. Por ejemplo, en axiomas no-euclidianos establecidos por Riemann para presentar la noción de curva del espacio, la *recta* puede ser interpretada como un *arco del círculo* de esa área. Consecuentemente, la lógica se asemejaría a un procedimiento de verificación y sus proposiciones serían ideales, que por naturaleza, no deberían ser interpretadas, lo cual lleva a las preguntas como: ¿Todas las geometrías son equivalentes? ¿Por qué la geometría euclidiana tenía un papel prioritario? Así, el infinito, concebido como ideal, no podía recibir interpretación en un modelo, lo que condenaba su uso y podía ser contradictorio, entonces, ¿cuál sería la manera de utilizarlo?

Hilbert, a su vez, quiere conservar al mismo tiempo la posibilidad de utilizar el infinito y controlar su uso de una manera finita, de manera que si la geometría estaba en el dominio de las matemáticas, el infinito también lo estaba. El planteamiento de Hilbert es el siguiente:

- *Precisar el estatuto de la geometría*: interpreta por medios algebraicos las axiomáticas de diferentes geometrías, pero no prueba que la geometría fuera más ideal que el álgebra y por lo tanto, no se necesita pasar por ella para probar cualquier geometría.
- *Probar la geometría por medios matemáticos más fundamentales*: de manera que, por ejemplo, la geometría cartesiana debería ser probada por la aritmética de los números enteros o reales.

- *Probar la consistencia absoluta de la matemática*: por ejemplo, a partir de la consistencia de los números enteros se deducirían todas las otras axiomáticas. Para hacerlo, transforma el concepto de axiomática y distingue dos clases de esta: de *contenido* y *formal*. La de contenido, comprende las proposiciones *finitistas* (se verifican por medios efectivos) e *ideales* (no se verifican por esos medios, como las transfinitas, las existenciales y universales). El objetivo era reducir estas últimas proposiciones a las de contenido, las cuales podían asegurar la no-contradicción, dejando solo las proposiciones sin posibilidad de interpretación, es decir, sin contenido, reguladas por procedimientos efectivos, que podrían responder directamente a la pregunta de la no-contradicción, en el caso de las dos axiomáticas.
- Asegurar el aspecto formal de las proposiciones de contenido: aquí lo más difícil era asegurar lo formal en las proposiciones transfinitas (control de la hipótesis de lo continuo).
- Asegurar que la deducción se opere de manera efectiva: es decir, en un número finito de etapas, *operada* fuera del sistema formal por el matemático, como disciplina del pensamiento²² y que puede, por ende, controlar el *infinito*.

Anotaciones

Era sobre este sistema completamente formalizado (en la medida que no era interpretado) que se quería saber si las fórmulas o axiomas formaban un sistema no-contradictorio y para establecerlo, en el caso de la aritmética, consistía en producir una prueba de imposibilidad²³. Así, por medio de esta prueba de imposibilidad, Turing y Gödel rechazan el planteamiento de Hilbert.

3.2. Planteamientos de Turing

Hilbert en su “Programa” presenta varias problemáticas de interés para los matemáticos y que concierne el estatuto de la *axiomática*, así:

- ¿Es *completa*, en el sentido que cada fórmula puede ser demostrada o rechazada?

²² Nuestro pensamiento sería *finitista* y funcionaría de manera *efectiva*, para Hilbert.

²³ Se supone la existencia de una *contradicción* entre los axiomas del sistema formal y se demuestra que esta suposición es contradictoria.

- ¿Es *consistente*, en el sentido que cada fórmula contradictoria no puede ser generada a partir de sus axiomas?
- ¿Es *decidible*, en el sentido que requiere un método efectivo para decidir que una fórmula cualquiera puede ser verdadera o falsa?

Anotaciones

Esta última problemática es lo que se conoce como el *Entscheidungs problem* o *Problema de la Decisión* y es la base del trabajo de Turing. Las respuestas a las tres problemáticas fueron negativas, las dos primeras aportadas por Gödel y la última por Alan Turing, Emil Post, Alonzo Church y Stephen Kleene, entre otros, quienes se basan en el trabajo realizado por Gödel para plantear su negativa. Así mismo, se descubrieron fenómenos inesperados, creando un verdadero “laboratorio decidible”, en donde el nacimiento de la informática ilustra concretamente estos fenómenos.

3.2.1. Respuesta de Gödel

La respuesta de Gödel al primer problema de la completitud (en 1931), prueba que hay una parte *restante* de la Aritmética que está por fuera de la Axiomática Formal, de manera que la demostración de una proposición no era estrictamente equivalente a su verdad porque un teorema (proposición verdadera) podía ser verdad sin ser deducible de sus axiomas: era, entonces, necesario disociar la deducción de naturaleza *sintáctica* (formal) y la de naturaleza *semántica* (contenido) dentro de la Axiomática Formal.

Anotaciones

Esto tenía una consecuencia desde el punto de vista *filosófico* porque al pasar del *finitismo* metamatemático al *finitismo* del pensamiento, hacía que se perdiera su carácter de *presupuesto necesario*, impuesto por Hilbert. Inclusive, para Gödel, era entonces la reticencia en utilizar razonamientos no-finitistas en el pensamiento que llevaba a la “consecuencia trivial” de teoremas como el de la *incompletitud* de 1931 (Wang, 1974, p. 8). En consecuencia, sería necesaria, una modificación profunda desde el punto de vista de la Axiomática, para solucionar los límites internos que tocaban su completitud y su consistencia, y posteriormente su decidibilidad.

3.2.1.1. Planteamientos y consecuencias

Gödel (1931) en su artículo: “Sobre las proposiciones formalmente indecidibles de los *Principia Mathematica* y los Sistemas emparentados I”,

introduce un sistema formal P construido a partir del sistema lógico de los *Principia Mathematica* de Russell y de los axiomas de los números enteros de Peano²⁴. Demuestra que existe en el sistema, fórmulas o proposiciones verdaderas indecidibles que no pueden ser ni confirmadas, ni afirmadas. Precisamente, demuestra que la aritmética formal no puede ser probada sino al interior de su sistema axiomático.

Su desarrollo consiste en codificar todas las fórmulas del sistema P, así que sus demostraciones con números enteros: “una fórmula es una cadena de números naturales y una demostración es una cadena finita de cadenas finitas de números naturales”²⁵.

Explícitamente, presenta una descripción de un cálculo formalizado al interior del cual pueden ser expresadas las relaciones aritméticas corrientes. De esta manera, las fórmulas del cálculo (cadena de signos) elaboradas por un conjunto de signos elementales y según una demostración (cadena finita de fórmulas) son completamente codificadas por un número: el “Número de Gödel” distinguiendo el signo elemental, la fórmula y la demostración, lo que permite establecer un método con el fin de “arimetizar” el cálculo formal, permitiendo una correspondencia biunívoca entre las expresiones del cálculo y un subconjunto de enteros. Así, si una expresión es dada, el número de Gödel correspondiente puede ser calculado y viceversa. Este método puede ser realizado mecánicamente por una máquina, definiendo claramente su estructura y su composición.

La etapa siguiente del método consiste en demostrar que todas las aserciones “metamatemáticas” (propiedades de las expresiones, entre otros) se pueden referir al cálculo mismo, con el fin de que estas puedan ser igualmente aritmetizadas.

Anotaciones

Vemos que el planteamiento de Gödel consiste en operar una aritmetización de la metamatemática. Si Hilbert propone una axiomática formal, Gödel pasa de esta a una aritmética formal. La pregunta aquí sería, si ¿no hay una vuelta atrás al *contenido o significado* de las proposiciones formales dadas de la axiomática

24 El se sirvió de esta adaptación de los “Principia Mathematica” y de los axiomas de Peano, pero cualquier cálculo que se refiera al sistema de los números cardinales, puede convenir.

25 Si Gödel tenía como objetivo responder al Programa de Hilbert, que se proponía (entre otros) la voluntad de traducir la aritmética por la lógica, es decir transformar los números por fórmulas, con esta propuesta, él acababa, en cierta medida, con el Programa de Hilbert porque Gödel desarrolla su contrario: codificó las fórmulas por los números enteros.

formal? Pero cómo se justifica la vuelta a la aritmética formal que en este caso sería una aritmética de contenido? Sabemos que en la metamatemática, la axiomática es formal solamente cuando está desprovista de cualquier contenido y en la aritmética formal propuesta por Gödel el símbolo es el *número*, es decir, que tiene significación.

De esta manera, lo que realiza Gödel es trabajar en los dos sentidos, la axiomática formal y la aritmética; o sea, que a la axiomática formal, se le "recodifica" rigurosamente con *números* porque justamente la axiomática no tiene ningún contenido, y la aritmética de los enteros sigue una doble transformación: se sustrae primero su contenido por medio de la axiomática sin contenido y se recodifican estos signos sin contenido, con números. De manera que, a cada signo sin contenido de la axiomática formal, puede atribuírsele un número único²⁶ y por lo tanto, todas las fórmulas o cadenas de fórmulas reciben un número específico propio, lo que hace posible codificar bajo una relación aritmética, las relaciones de inferencia entre axiomas, teoremas, ... etc. Se superponen así dos interpretaciones: una interpretación metamatemática y una aritmética, de manera que con esta codificación la axiomática puede convertirse en el *cálculo formal* esperado.

Este punto nodal, en la argumentación de Gödel, va a ser utilizado por Turing para dar respuesta al problema de la decidibilidad o al de saber si existe o no un procedimiento efectivo capaz de decidir con antelación, si un axioma o proposición verdadera es un teorema o no.

3.2.2. Respuesta de Turing

Turing se propone aclarar la pregunta: "¿Cuáles son los procesos generales que se necesitan para calcular un número? Es decir, la búsqueda de un "proceso general" con el fin de determinar si un número dado n tiene una propiedad $G(n)$ (n es la representación dada por Gödel de una fórmula demostrable) o en otras palabras: para calcular un número cuya n -ésima cifra es 1, se quiere saber, si $G(n)$ es verdad y 0 si es falso. Se trata de precisar, específicamente, lo que se entiende por un *procedimiento efectivo* o por un *algoritmo* para realizar cálculos

26 Así, por ejemplo para la asignación del Número de Gödel a las constantes, tenemos:

Constantes	Número de Gödel	Significado
-	1	No
V	2	o
\supset	3	Si..., entonces
\exists	4	Existe
=	5	Igual
S	6	Sucesor

(problema de la decisión); y de manera general sobre las propiedades lógicas y sus límites, es decir los problemas metamatemáticos planteados por Hilbert.

3.2.2.1. Puntos problemáticos

Antes de enseñar la solución de Turing, presentamos dos puntos problemáticos sobre los cuales él tenía que hacer aclaraciones:

- *Noción de cálculo*

Si bien la noción de cálculo que se utilizaba por los matemáticos desde siempre, parecía no tener problema, esta no había sido tema de estudio profundo y era catalogada como una *herramienta* en matemáticas pero no como *objeto*. En este sentido, el planteamiento de Hilbert pedía definir las herramientas matemáticas como objetos para resolver el *problema de la decisión*, es decir, caracterizar claramente la noción de cálculo en sí misma y sus relaciones con la noción de función y de procedimiento efectivo.

La noción de *cálculo*, en el siglo XVIII, fue asociada a la de *función* que, en parte se consideraba como un *procedimiento de cálculo*, en el que a un valor numérico de x , correspondía, por una transformación efectuada por la función f , un valor $f(x)$. Esta noción se precisa en el siglo XIX como una puesta en correspondencia entre un conjunto de partida y un conjunto de llegada, pero nada dice que se tengan los medios para describir por medio del cálculo, esta correspondencia. Así, se hacía necesario aclarar la relación entre función y cálculo, de manera que, por ejemplo, saber si para resolver una función de enteros existía un procedimiento de cálculo o no, y en el caso de que existiera, si el resultado del cálculo daría una *función calculable*. El límite de esta función era *indeterminado* porque dependía de encontrar el procedimiento efectivo de cálculo que produjera la función, lo que hacía difícil su definición formal.

En este sentido, la noción de procedimiento efectivo, puede asemejarse a aquella de *algoritmo* que es una noción técnica y no totalmente formal (no regulado por las normas de la Axiomática Formal). *Algoritmo*, entendido como una lista de instrucciones que se deben seguir para llegar a un resultado después de un número finito de etapas. Es un procedimiento general que responde a una clase de preguntas, por ejemplo: ¿si un número cualquiera pertenece a la clase de números primos? Inclusive si la clase de números primos es infinita, el número n se escoge entre el conjunto infinito de los números enteros. El número de casos para investigar debe ser finito, porque en su opuesto, este número de casos sería interminable y entonces el procedimiento o algoritmo no tendría fin.

En el caso de la Axiomática Formal, sabiendo que esta tiene la capacidad de representar el infinito de los números enteros, el procedimiento de decisión

consiste en determinar si una fórmula o proposición es decidible de los axiomas de la axiomática formal²⁷.

Anotaciones

Turing al proponerse la tarea de definir formalmente la noción intuitiva de cálculo, necesitaba desarrollar una noción lo suficientemente amplia, que cubriera esta noción intuitiva, en su generalidad. En consecuencia, requería precisar a su vez, el contenido formal de la *función calculable*, cuyo comportamiento depende de un procedimiento efectivo o algorítmico.

- *Noción de función calculable*

Intuitivamente, se entiende por *calculable* el resultado de una operación que conduce a la determinación exacta de un número. Desde la antigüedad griega, el concepto de *calculable* se ha ido refinando y se despejaron tres casos:

- Corresponde a la intuición que se tiene de la noción de *calculable*, y consiste en encontrar, luego de una operación que comprende un número finito de etapas, un resultado exacto. Por ejemplo: “ $5 + 5$ ” o $\sqrt{9}$, cuyo cálculo lleva a un resultado exacto después de la realización de la operación planteada.
- Consiste en encontrar, después de una operación que comprende un número finito de etapas, un resultado aproximado a un grado cualquiera de aproximación que se ha decidido con anterioridad. Por ejemplo, se puede calcular la expansión decimal de $\sqrt{2}$, que es infinita, aproximándola a 6 cifras.
- Corresponde a lo *incalculable*, en el cual no se tienen los medios para calcular un resultado exacto, después de una operación de un número de etapas finitas, o después de la aplicación de reglas de aproximación del resultado.

Para los dos primeros casos, en caso de conjuntos, se puede decir que, una función se llama *calculable* si su valor para cada número calculable en el conjunto de partida, es un número calculable.

²⁷ Es interesante saber que la respuesta afirmativa que espera Hilbert sobre el *Entscheidungs problem* o Problema de la Decisión está basada en un lineamiento epistemológico que es el de la *solución de todo problema matemático*, el cual debe tener una forma tal que sea siempre posible resolverlo. Para él, no había “*ignorabimus en Matemática*”, de ahí la importancia dada a la búsqueda de solución del problema de la decisión para su filosofía matemática (Lassègue, 1998, p. 61-62).

Anotaciones

Desde un punto de vista general, el dominio de lo calculable es una parte mínima del desarrollo de las matemáticas, como se ve en los trabajos sobre *Teoría de Conjuntos*, pero es solamente al perfeccionar la noción de *función* que este hecho capital en matemáticas se aclaró.

Una de las tareas capitales de la investigación matemática consiste en encontrar la manera de aproximar, por medio del cálculo, un cierto número de funciones (*Análisis numérico*); se trata de encontrar métodos algorítmicos o efectivos que permitan encontrar los elementos característicos que hacen posible el cálculo aproximado de la función estudiada. Por ejemplo, en la función \sqrt{x} definida sobre el conjunto de los números reales, encontrar que a todo x en el conjunto de los números naturales le corresponda la raíz \sqrt{x} , descrita a cualquier nivel de aproximación decidido con anterioridad, es entonces una *función calculable*. Y esto porque siempre es posible exhibir el resultado único de la puesta en correspondencia entre x y \sqrt{x} .

El análisis numérico tiene entonces como campo de estudio los dos primeros casos de calculable y es en estos dos casos que Turing perfeccionó las técnicas efectivas y obtuvo un gran número de resultados, pero es en el tercer caso, aquel del *incalculable*, que su nombre tomó importancia en la historia de las matemáticas y de la informática.

3.2.2.2. Puntos de la solución de Turing

En el artículo de 1936, “sobre los números calculables, con una aplicación al Entscheidungs problem” (Turing, 1936-1937, pp. 48-104, versión francesa), él se centra en el problema de la decisión y establece cuatro aspectos importantes:

- *La idea intuitiva de calculabilidad*

A partir de la práctica de una persona que efectúa cálculos por medio de signos sobre una hoja de papel, Turing presenta un análisis minucioso de lo que hace un calculador humano, según los símbolos observados y su estado de “espíritu” a un momento dado²⁸, el quiere mostrar la característica formal

28 Turing, Alan (1936-1937, pp. 78, de la versión francesa): “El comportamiento de un hombre que calcula se determina a todo momento por los símbolos que observa, y por su “estado de espíritu” del momento. Se supone que este calculador observa un número máximo M de símbolos (o de casillas) a la vez en un momento dado. Si quiere observar más, debe hacer muchas observaciones sucesivas. Suponemos que no es necesario tener en cuenta sino un número finito de estados mentales, por una razón análoga a aquella que nos lleva a limitar el número de símbolos. En efecto, si se admite la existencia de una infinidad de estados mentales, algunos entre ellos serían “arbitrariamente cercanos” al punto de confundirse entre

del pensamiento cuando se realiza un cálculo formal, como base epistemológica presentada por Hilbert. Con este soporte, va a demostrar que no hay nada en el acto de calcular que no pueda ser realizado por un dispositivo mecánico simple.

- *Definición de una máquina abstracta para calcular*²⁹

El equivalente formal dado por Turing a la noción intuitiva de cálculo por medio de un procedimiento de la manera de calcular, se puede llamar *algoritmo*, expresado así: “toda función a través de la cual se encuentra un algoritmo debe ser calculable por una máquina de Turing”, lo que establece una correspondencia entre los algoritmos de un lado y las máquinas de Turing, de otro. De esa manera, las funciones calculables que le corresponden deben ser *Turing calculables* (por máquina de Turing), para las cuales utiliza la operación aritmética y da una representación formal codificada de un cálculo.

La representación del cálculo por una máquina se hace a través de una máquina abstracta, sobre papel, cuyo procedimiento decidible es un conjunto regulado de operaciones efectuadas para esta máquina sobre las cadenas de signos.

Esta caracterización, no es una definición totalmente formalizada, es más del ámbito de una *tesis* que puede nominarse *mecanicista*, pero que se supone va a formar parte de la órbita de estas definiciones.

- *Definición de Números y Funciones Calculables*

Para caracterizar la noción de cálculo, Turing quiere responder primero a la pregunta: ¿qué es un número real calculable? y luego a: ¿qué es una función calculable? En este sentido, define los números *calculables* como números reales cuya expresión decimal es calculable por medios finitos³⁰. Los números reales se representan por una cadena infinita de cifras, operación que toma un tiempo infinito. Sin embargo, con el fin de volverlos calculables es necesario

ellos. Aquí, esta restricción no es de naturaleza para afectar seriamente el cálculo, porque estados mentales más complicados pueden evitarse escribiendo más símbolos en la cinta”.

29 Turing, Alan (1936-1937, pp. 80, de la versión francesa): “Se puede construir ahora, una máquina para efectuar el trabajo del calculador. A cada estado de espíritu del calculador corresponde una “m-configuración” de la máquina. La máquina examina B casillas correspondientes a las B casillas observadas por el calculador. A cada paso, la máquina puede cambiar cualquiera de las casillas examinadas por otra casilla distinta de al menos L casillas de uno de las casillas examinadas. El cambio que se efectúa, y la configuración que resulta, son determinadas por el símbolo examinado y la m -configuración”.

30 *Ibíd*, p. 49 de la traducción francesa.

medios finitos. El conjunto de los números calculables es inmenso, comparable al de los reales, no obstante es enumerable.

Con la definición de *números calculables*, Turing expone una *teoría de funciones de una variable real*, en la perspectiva de la *Calculabilidad*, en la cual establece que un número es calculable si su representación decimal puede ser escrita por una máquina. Esta definición, era hasta aquí informal porque la naturaleza de los medios susceptibles de ser utilizados no había sido formalmente explícita, en consecuencia la tesis de Turing o la representación mecánica por una máquina volverá la definición formalizada.

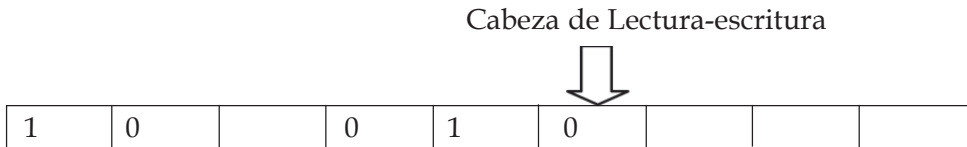
De esta manera para una máquina de Turing, el resultado de un cálculo representa el valor de una función, inscrita al principio sobre la cinta de la máquina (ver parágrafo siguiente: Composición de la máquina), si hay resultado. Lo cual nos lleva a decir, que una función numérica es calculable, si existe una máquina de Turing que sea un procedimiento de decisión para esta función; así mismo él extiende el cálculo a cadenas de signos cualesquiera (simbólicas) y a todos los procedimientos de cálculo usuales, lo que confiere un carácter general a su tesis. Esto hace posible la pregunta: ¿existe una máquina de Turing capaz de calcular una función x ?

- *Composición de la máquina de Turing*

Sabemos que la máquina es de "papel" o abstracta, especie de "caja negra", donde se tienen en cuenta solamente los datos de entrada y los datos de salida transformados. La estructura de la máquina es muy simple:

- una banda infinita dividida en casillas, semejante a una memoria rudimentaria, con una capacidad de almacenamiento infinita; cada símbolo está almacenado en una casilla $S(i)$, quiere decir que en la casilla S está inscrito el símbolo i .
- una cabeza de lectura-escritura, capaz de observar el contenido de una casilla de la banda, en un tiempo t , de desplazarse a lo largo de la banda en cualquier sentido, de pararse sobre una casilla observada y de borrar el símbolo de la casilla.
- un conjunto finito de estados (q_1, q_2, \dots, q_n) que distinguen los comportamientos de la máquina. Con el símbolo observado $S(i)$ en una casilla y un en estado de la máquina se tiene la configuración de la máquina: $(q_n, S(i))$; es esta configuración que determina la evolución de la máquina, como inscripción de un nuevo símbolo de la casilla $S(i)$.
- una tabla de instrucciones que controla cada acción de la máquina.

Se puede representar la *máquina de Turing*, como sigue:



De esta manera, cualquier algoritmo o procedimiento de decisión puede ser simulado por una máquina de Turing. El mecanismo es muy simple: en función del símbolo $S(i)$ que la cabeza está leyendo y de acuerdo a su estado q_i , ella escribe un nuevo símbolo $S(i')$ en la casilla, pasa a un nuevo estado $q_{i'}$; y efectúa un desplazamiento de al menos una casilla: a la derecha, a la izquierda o se queda en la casilla.

- Máquina Universal de Turing

Hemos visto que cada cálculo exige su máquina de Turing, desde un punto de vista *psicológico* el calculador humano busca el algoritmo y construye la máquina de Turing que necesita y hace la relación entre un algoritmo o problema dado y la máquina que le corresponde. Esta consonancia puede ser el objeto de un procedimiento general, que a su vez (dicho procedimiento) puede ser controlado por una máquina. Se puede, entonces, concebir máquinas de Turing universales, para operar cualquier algoritmo. Es entonces, su capacidad de amoldarse o imitar, parecida a la del calculador humano, a cualquier algoritmo planteado (instrucciones) que hace su importancia y capacidad. Es posible obtener un conjunto enumerable de todas las máquinas de Turing, y concebir una relación funcional entre la máquina de Turing individual y la máquina que imita, es decir, que sea posible cualquier *función calculable*. Esta universalidad de la máquina delimita el campo de lo *calculable*.

Así mismo, con el planteamiento de esta máquina universal, el presenta una apuesta metodológica y de estructuración para la deducción, de manera que las instrucciones deben ser reutilizadas por cualquier máquina que sea necesaria, si se trata de combinar las instrucciones, entonces estas se pueden reducir a elementos más simples y los cálculos lo serían también: cálculos simples que formarían parte de cálculos más vastos. El propósito de Turing es el de reducir los cálculos, pero también lo infinito de los cálculos llevarlo a lo finito.

- Problema de la Parada

La solución al problema de la decisión supone que sea comprendida en un sentido general, a saber que: "todo procedimiento decidible" cualquiera que

sea, pueda ser efectuado por una máquina de Turing, o que toda función para la cual existe un procedimiento decidible sea igualmente calculable por una máquina de Turing³¹. Sin embargo, este concepto no permite determinar con antelación la relación entre los problemas del infinito de los cálculos y la obligatoriedad de lo finito de las tablas de configuraciones e instrucciones. Para precisarlo, Turing presenta un problema que le compete a todas las máquinas de Turing, que se llama el “problema de la parada”.

En este sentido, la pregunta sobre la decidibilidad de carácter general planteada por Turing, se logra sintetizar así: ¿se puede saber con antelación si todo cálculo tendrá o no un fin? Es decir: ¿si se puede saber de manera general, sin haber realizado el cálculo, que la máquina va a parar o no? Lo que nos llevaría a preguntarnos sobre la existencia de una máquina de Turing que sería capaz de resolver el problema de la parada sobre un dato de entrada. Por ejemplo, si una máquina de Turing cualquiera T , posee una cadena de signos C escrita sobre su banda, ¿se para en un tiempo finito, teniendo escrito sobre su banda, por ejemplo 0 si T no se para en el dato inicial C , y 1 en el caso contrario? Esta máquina no existe, sería una máquina de decisión, capaz de conocer globalmente el comportamiento de cada máquina de Turing (es decir, el resultado del cálculo, su parada o su ausencia) a partir de la simple observación de su tabla de instrucciones. Ninguna máquina u algoritmo permite ver, con anterioridad, el resultado del cálculo, es decir su parada o no.

Turing al establecer una correspondencia entre la solución del problema de la decisión y el problema de la parada de la máquina, ha necesitado resolver el problema de la parada de la máquina, pero como resultado de la tesis de Turing, ninguna máquina de Turing puede resolver el problema de la parada, entonces, el problema es insoluble, y por consecuencia la solución al problema de la decisión es igualmente insoluble. Así, en términos de lógica, lo que una máquina de Turing no puede hacer es determinar con antelación y de manera efectiva si una proposición dada es un teorema o no, de la misma manera que no sabe prever si un cálculo cualquiera, llegará a un resultado en un tiempo finito. Como consecuencia importante de su tesis es la correspondencia entre el cálculo y la demostración; correspondencia que enfatiza, a su vez, el presupuesto sobre la universalidad de la máquina de Turing.

Anotaciones

Turing al hacer la correspondencia entre la insolubilidad del problema de la decisión y el problema de la parada, presenta tres aspectos importantes de

31 Existe una cantidad de *funciones numéricas* (teoría de conjuntos, por ejemplo) y *simbólicas* que no pueden ser calculadas por las máquinas de Turing por el hecho del carácter enteramente finito de estas máquinas.

la teoría de la calculabilidad y por ende de la informática: la correspondencia entre el cálculo por una máquina y la demostración de una fórmula en un sistema lógico; la síntesis de elementos numéricos y simbólicos del cálculo, ampliando el campo de las formas de representación de este; y la caracterización de funciones calculables.

4. CONCLUSIONES

Se puede resumir el *cientificismo* de principios del siglo XX, encarnado por Hilbert en la expresión: “todos los problemas tienen una solución”, dado que existen problemas que comprenden las bases del razonamiento por demostraciones de consistencia y otros que se refieren a los procedimientos generales para llegar a la solución, o a encontrar un *algoritmo* que resuelva un cierto número de problemas. Hasta aquí, las soluciones encontradas eran abstractas y por lo tanto la noción de la *calculabilidad* era abstracta, hasta la solución *mecanicista*, dada por Turing. Solución concreta y formalizada, pero que sin embargo, concierne una *máquina abstracta*; planteamiento que rompe con la tradición de las máquinas *físicas o materiales*, generando una manera particular de mostrar una *máquina*, cuya originalidad reside en la utilización de procedimientos lógicos para su funcionamiento. Así, las máquinas materiales pierden su carácter pragmático en la resolución de problemas de cálculo y se vuelve esencialmente lógico y teórico, según las exigencias metodológicas del *formalismo*.

Vemos como Turing y en general, los lógicos de los años treinta, incitados por estas exigencias generan verdaderos laboratorios de lo *calculable efectivo*, el cual conformaría la *Teoría de la Calculabilidad*. Esta define los límites de lo calculable, mostrando problemas que no son calculables y por lo tanto no-decidibles, para lo cual la *máquina de Turing* es ejemplarizante. En cierto sentido, la noción abstracta de máquina se *inserta* en la demostración matemática e igualmente en aplicaciones prácticas, transforma el imaginario científico, lo mismo que nuestra concepción de lo natural e inmediato, desde entonces se puede concebir preguntas centrales de la lógica vía la noción de la calculabilidad *mecánica*.

Igualmente, la correspondencia del problema de la decisión al problema de la parada de la máquina de Turing cuando realiza un cálculo, demostrado como insoluble, marca uno de los límites de la decidibilidad y por lo tanto de la *Calculabilidad*. Así mismo, para el funcionamiento del procedimiento efectivo o máquina, se requería el planteamiento y precisión de un tipo de funciones que era necesario *matematizar* o formalizar para llegar a la noción de *función calculable*, con *propiedad decidible*. Funciones, que pueden

ser resueltas por un *si* o *no* (verdadero o falso; 1 o 0), es decir, aquellas de estilo $x \hat{a} A$. Estas funciones son enteramente calculables porque después de un cálculo, una parada de la máquina de Turing es previsible, es decir, que un cálculo efectivo, solamente puede realizarse con este tipo de funciones, las cuales marcan los límites de lo decidible, lo calculable y posteriormente de la informática.

BIBLIOGRAFÍA

- Aho, A. V.; Hopcroft, J. E.; Ullman, J. D. (1983). "Data Structures and Algorithms". Addison-Wesley Publishing Company.
- Anderson, A. R. (Direction), Guieze, G. (Présentation) (1983). "Pensée et Machine". Ed. Champ Vallon.
- Bernays, P. (1930). "La philosophie des mathématiques et la théorie de la démonstration de Hilbert". Dans: "Philosophie des Mathématiques". Introduction et traduction de Hourya Sinaceur. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 2003. (Mathesis: Michel Blay- Hourya Sinaceur), p. 80- 81.
- (2004). "The blackwell guide to the philosophy of computing and information". Ed. by Luciano Floridi. Blackwell Publishing Ltda.
- Blanché, R. "L' Axiomatique" (1990). Paris: Quadrige PUF (1ère édition, 1955).
- Blanché, R. et Dubucs, J. (1996). "La Logique et son histoire", Paris: Armand Colin (Collection "U", série Philosophie).
- Boniface, J. (2004). "Hilbert et la notion d'existence en mathématiques". Paris: Librairie Philosophique J. Vrin (Mathesis: Michel Blay- Hourya Sinaceur).
- Booker, A.R. (2006). "Turing and the Riemann hypothesis". Notices Amer. Math. Soc., 53(10): 1208-1211.
- Bretón, P. (1990). "Une Histoire de l'Informatique". Paris: Eds. La Découverte.
- Chabert, Jean-Luc; Barbin, Evelyn; Guillemot, Michel; Pajus, Anne Michel; Borrowczyk, Jacques; Djebbar, Ahmed; Martzloff, Jean Claude (1994). "Histoire d' Algorithmes. Du caillou à la puce". Paris: Editions Belin.
- Chaitin, G. J. (1987). "Information, Randomness and Incompleteness: Papers on Algorithmic Information Theory". Singapore: World Scientific.
- Davis, Martín (1988). "Influences of Mathematical Logic on Computers Science". Dans: *The Universal Turing Machine. A half-century survey*. Ed. Par Rolf Herken, pp. 315-326.

- Davis, M. (1988). "Mathematical Logic and the Origin of Modern Computers". Dans: *The Universal Turing Machine. A half-century survey*, ed. par Rolf Herken, pp. 149-174.
- Delahaye, J. P. (1999). "Information, complexité et hasard". 2nd. éd. revue. Paris: Hermes.
- Dellesert, A. (2000). "Gödel: une révolution en Mathématiques", essai sur les conséquences scientifiques et philosophiques des théorèmes gödéliens. Lausanne, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- Dreyfus, H. (1984). "L'Intelligence Artificielle: Mythes et Limites". Paris: Flammarion.
- Dupuy, J. P. (1994). "Aux Origines des Sciences Cognitives". Paris: Editions La Découverte.
- Durand, B., et Zvonkin, A. (2004). "Complexité de Kolmogorov". Dans: *L'héritage de Kolmogorov en mathématiques*: Eric Charpentier, Annick Lesne, Nikolai Nikolski. Paris: Belin.
- Floridi, Luciano (2004). "Information". Dans: "The Blackwell Guide to the Philosophy of Computing and Information". Ed. by Luciano Floridi. Blackwell Publishing Ltda., pp. 40-61.
- Gandy, Robin O. (1998). "The confluence of ideas in 1936", dans *The Universal Turing Machine. A half-century survey*.
- Gauthier, Yon (1997). "Logique et Fondements des Mathématiques". Diderot Eds. Arts & Science.
- Gödel, Kurt (1965). "On undecidable propositions of formal mathematical systems". Polycopie d'un cours de 1934 à l'Institut des Etudes Avancées de Princeton, dans: "The Undecidable", ed. Martín Davis, Raven Press, pp. 39-71.
- Gödel, K. (1989). "Sur les propositions formellement indécidables des Principia mathematica et des systèmes apparentés I". 1931. Dans: "Nagel, Ernest; Newman, James R.; Gödel, Kurt; Girard, Jean Yves: "Le Théorème de Gödel". Traductions de l'anglais et de l'allemand par Jean Baptiste Scherrer. Paris: Editions du Seuil.
- Guillaumaud, J. (1971). "Norbert Wiener". *Savants du monde entier*. Editions Seghrs.
- Gunderson, K. (1983). "Le Jeu de l'Imitation". Dans: *Pensée et Machine*. Ed. Champ Vallon.
- Herken, R. éd. (1988). "The Universal Turing Machine. A half-century survey". Oxford University Press (1er. éd.). Wien, New York, Springer-Verlag, 1994-1995 (2d. éd.).
- Hilbert, D. (1900). "Conférence 1900: sur les problèmes futurs des mathématiques; compte rendu du 2^{ème}". Paris: Congrès International des Mathématiciens.

- Hilbert, D. et Bernays, P. (1934). "Fondements des Mathématiques 1". Traduction de l'ouvrage "Grundlagen der Mathematik 1" (Springer) 2ème. éd. (1968) avec les passages parallèles de la 1^{ère}. édition. Traduction de l'allemand par F. Gaillard et M. Guillaume. Ed. L'Harmattan, 2002, 2 vols.
- Hilbert D. (1925). "Sur l'infini"; traduit par André Weil. Über das unendliche: conférence prononcée le 4 Juin 1925 à l'occasion d'un congrès des mathématiciens organisé à Munster i. w. par la Société Mathématique de Westphalie en l'honneur de la mémoire de Weierstrass. L'original de cette traduction a paru en allemand dans les Math. Ann. t. 95.
- Hodges, Andrew (1988). "Alan Turing ou l'énigme de l'intelligence". Paris: Eds. Payot.
- Hottois, G. (2002). "Penser la Logique: une introduction technique et théorique à la philosophie de la logique et langage". 2ème ed. Bruxelles, De Boeck Université.
- _____ (1996). "Introduction Algorithmique Générale et Numérique". Paris: Masson.
- _____ (1952). Kleene, Stephen C.: "Introduction to Metamathematics". Amsterdam North Holland.
- Kleene, S. C. (1971). "Logique Mathématique". Traduction de Jean Largeault. Paris: Lib. Armand Collin.
- Kleene, S. C. (1988). "Turing's Anaysis of Computers and Major Applications". Dans: *The Universal Turing Machine. A half-century survey*, ed. par Rolf Herken, pp.17-53.
- Kolmogorov, A. N. (1965). "The approach to the definition of the concept of "quantity of information" (en russe: Problemy Peredachi informatsii), 1(1):3-11.
- Ladriere, J. (1957). "Les Limitations Internes des Formalismes: Etude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des mathématiques". Paris: GAUTHIER-VILLARS Ed. "Collection de Logique Mathématique". Série B. Monographies réunies par M.R. Feys (Louvain).
- Lalement, R. (1990). "Logique, Réduction, Résolution". Paris: Masson.
- Largeault, J. (1993). "La Logique", Paris: PUF, 2^{ème} éd. corrigée.
- Lassegue, J. (1998). "Turing". Paris, Les Belles Lettres.
- Levy, P. (1990). "Les Technologies de l'Intelligence: l'avenir de la pensée à l'ère informatique". La Découverte.
- Mackdy, D.M. (1969). "Information, mechanism and maching". Cambridge: MIT Press.
- Martín, B. (2004). "Codage, Cryptologie et Applications". Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR), Avril. Série: Technique scientifique Télécom-France.

- Markov, A. A. (1961). "La théorie des algorithmes", Tr. Math. Inst. Steklov. Vol. 38 (en russe); trad. Angl.: AMS Translation 15.
- Martín, R. (1964). "Logique Contemporaine et Formalisation". Paris: PUF.
- McCulloch, W. S. (1949). "The Brain as a Computing Machine", dans *Electrical Engineering*, June, LXVIII, pp. 492-497. Traduction Française: "Du cerveau comme calculateur", dans "Sciences Cognitives. Textes Fondateurs (1943-1950)", ibid. pp. 189-214.
- McCulloch, Warren S. (1953). "Une comparaison entre les machines à calculer et le cerveau" dans "Les Machines à penser", colloque janvier 1951. Paris: CNRS, pp. 425-443.
- Minsky, M.L. (1967). "Computation: Finite and Infinite Machines". Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. (Series in Automatic Computation, George Forsythe, éd.).
- Mosconi, J. (1998). "Calculabilité et Formalisation". pp. 47-65. Dans "Le Formalisme en Question: Le tournant des années trente". Edité par Frédéric Nef et Denis Vernant. Paris, Vrin. (Problèmes et Controverses: Directeur Jean François Courtine).
- Mosconi, J. (1989). "La Constitution de la Théorie des Automates". Thèse de Doctorat Histoire et Philosophie des Sciences, préparée sous la direction de Suzanne Bachelard). 2 volumen.
- Nagel, E.; Newman, J. R.; Gödel, K.; Girard, J. Y. (1989). "Le Théorème de Gödel". Traductions de l'anglais et de l'allemand par Jean Baptiste Scherrer. Paris: Editions du Seuil.
- Piguet, Ch.; Hugli, H. (2004). "Du zéro à l'ordinateur. Une brève histoire du calcul" Lausanne, Presses polytechniques et universitaires romandes.
- Poincaré, H. (1968). "La Science et l'Hypothèse". Paris: Flammarion.
- Pradilla Rueda, M. (2008). "Vers une épistémologie de la théorie informatique". Paris: Université Paris 1 - Panthéon Sorbonne. Thèse Docteur en Philosophie.
- Putnam, H. (1983). "Minds and machines", *Dimensions of Mind: A symposium*, Sydney Hook Ed., New York, University Press, New York, 1960. Trad. Française, "Pensée et Machine", Anderson A.R., éd. Seyssel: Editions du Champ Vallon, pp. 110-134.
- Rabin, M. O.; Scott, D. (1959). "Finite automata and their decision problems". IBM, Dans: *Journal of Research and Development*. Avril, 3(2):114-125.
- Robinson, J.A. (1965). "A machine oriented logic based on the resolution principle". Dans: *J. ACM* 12: 1, 23: 41.

- Rivenc, F.; Rouilhan, P. de (1992). "Logique et Fondements des Mathématiques. Anthologie (1850-1914)", Paris: Payot.
- Rossenblueth, A., Wiener, N., Bigelow, J. (1995). "Comportement, But et Téléologie". Dans: *Sciences Cognitives. Textes Fondateurs (1943-1950)*. Compilation de Aline Pélissier et Alain Tête. Paris: PUF.
- Rouilhan, P. de (1988). "Frege les paradoxes de la représentation". Paris: Les Editions de Minuit.
- Scholz, H. (1968). "Esquisse d'une Histoire de la Logique". Traduit de l'allemand par E. Coumet, Fr. de Laur, J. Sebestik. Paris: Aubier-Montagne.
- Schuhl, A. (2004). "Les ordinateurs de demain". Cité de Sciences et de l'Industrie: Editions Le Pommier.
- Wiener, Rosenblueth, Bigelow, McCulloch, Pitts, von Neumann, Hebb, Weaver, Shannon Turing (1995). *Sciences cognitives: textes fondateurs (1943- 1950)*. Rassemblés et traduits par Aline Pélissier. Présentés et annotés par Alain Tête. Paris: PUF.
- Searle, J. (1980). "Minds, Brains and Programs". Dans: *Behavioral and Brains Sciences*, 3(3):417- 458.
- Sieg, W.; Byrnes, J. (1998). "Gödel, Turing, and K-Graph Machines". To appear in: *Logic in Florence*. Edited by A. Cantini, E.Casari, P. Minari; Kluwer Academic Publishers.
- Sinaceur, H.; Bourguignon, J. P. (1993). "David Hilbert et les Mathématiques du XX ième siècle". Dans: *La Recherche*, 257, sep., vol. 24. Traduction en espagnol dans: "*Mundo Científico*". 3(140) :936-943.
- Shannon, C. E., Mccarthy, J. (1956). "Automata Studies", Princeton: Princeton University Press.
- Shannon, C. E. (1993). "Collected Papers". Eds. N. J. A. Slone and A. D. Wyner. Los Alamos, C.A.: IEEE Computer Society Press.
- Stern, J. (1990). "Fondements Mathématiques de l'Informatique". Paris: Ed. Science Internationale.
- Turing, A. M. (1952). "The chemical basis of morphogenesis". En: *Phil. Tran. Roy. Soc.* B 237, pp. 37-52.
- Turing, A. M. (1995). "Computing Machinery and Intelligence". Dans: *Mind*, vol. 59, no. 236, 1950. Trad. française dans: "*Sciences Cognitives. Textes Fondateurs (1943-1950)*". Paris: PUF.
- Turing, A. M. (1995). "On computable numbers, with in application to the Entscheidungsproblem" aparece originalmente en los Proceedings of the

Mathematical Society, serie 2 vol. 42 (1936-1937), p. 230-265.; traducido al francés por Julien Basch y Patrice Blanchard en: Jean Yves Girard et Alan Turing, "La Machine de Turing", Paris: Editions du Seuil, pp.47-104.

Turing, A. M.; Girard, J. I. (1995). "La machine de Turing". Paris: Eds. du Seuil.

Vernant, D. (1986). "Introduction à la Philosophie de la Logique". Bruxelles: Pierre Mardaga Editeur.

Von Neumann, J. (1992). "The Computer and Brain". Traduction française: "L'ordinateur et le cerveau", traduit de l'américain par Pascal Engel, suivi de "Les machines molles de von Neumann" par Dominique Pignon. Paris: Editions La Découverte.

Wagner, P. (1998). "La Machine en Logique". Paris, PUF, (*Science Histoire et Société*).

Wang, H. (1975). "From mathematics to philosophy". London: Routledge & Kegan Paul.

Watier, G. (2001). "Le calcul confié aux machines". Paris: Ellipses Editions Marketing.

Wiener, N. (1995). "Cybernetics or control and communication in the animal and the machine", MIT Press, 1961. Traduction française "La Cybernétique ou le contrôle et la Communication chez l'Animal et la Machine". Dans: "Sciences Cognitives. Textes Fondateurs (1943-1950)". Compilation de Aline Péliusser et Alain Tête. Paris: PUF.

Wiener, N. (1962). "Cybernétique et Société". Paris: éditions Deux-Rives.

SOBRE EL INFINITO Y SUS DIFICULTADES ANTES DE GEORG CANTOR Y SUS OBRAS

ISAÍAS DAVID MARÍN GAVIRIA*

Recibido: mayo 2 de 2014 / Aceptado: junio 19 de 2014

¿EXISTE AL MENOS UN CONJUNTO INFINITO MÁS GRANDE QUE OTRO CONJUNTO INFINITO?

RESUMEN

En este ensayo se trata inicialmente el infinito desde el punto de vista filosófico desde la antigua Grecia, hasta finalizar con una pequeña presentación del enfoque Matemático que hace G. Cantor por medio de sus obras acerca del infinito.

Palabras clave: Ápeiron, infinito, infinito potencial, infinito actual, números transfinitos, números ordinales.

SUMMARY

This essay is initially infinity from a philosophical point of view from ancient Greece to end with a short presentation of Mathematical approach that G. Cantor through his works about the infinite.

Key words: Apeiron, infinite, infinite potential, actual infinity, transfinite numbers, ordinal numbers.

INTRODUCCIÓN

Cómo podemos hablar de algo que nos es difícil definir, explicar y hacer entender como lo es *el infinito*, este concepto, lo utilizamos cuando nos referimos a las cosas de las que no conocemos si tienen un fin, que no se pueden medir, que no se puede imaginar, y a las cosas que no se pueden encasillar dentro de los límites de nuestro lenguaje. Por esta razón, podemos decir que solo nos aferramos a la idea general de que el infinito es un algo que no tiene fin, que tiene continuidad, que permanece, y es aquí en donde demostramos que jugamos con el lenguaje y nuestra mente, ya que aun sin comprender el

* Matemático. Docente Investigador, Corporación Universitaria Republicana.

significado de las palabras que utilizamos, nos atrevemos a hacer aseveraciones sin sentido, basándonos solamente en los contrarios, *luz-oscuridad, bien-mal, infinito-finito*.

Por otro lado, sabemos que desde las matemáticas, a través de los números, los conjuntos, podemos aclarar un poco más la idea de lo *infinito*. Como veremos en este apartado a través de las ideas de Arquímedes, Xenón y Cantor con su trabajo que sin querer fue el que debeló este enigma, que desde antes de la antigua Grecia se venía trabajando.

EL INFINITO EN LA ANTIGÜEDAD: UNA PERSPECTIVA FILOSÓFICA

El tema del infinito al comprenderlo como una idea de algo que es ilimitado, sabemos que desconcertó a los antiguos pensadores griegos, los cuales hicieron grandes esfuerzos en tratar de comprender el significado y el sentido del infinito al someterlo a la intuición del sentido común. Lo que lamentablemente, teniendo como referente un mundo sensible, el cual podemos palpar, o mejor dicho, percibir a través de los sentidos, fue o sigue siendo el causante principal de llegar a las conclusiones contradictorias, como lo que acontece en la tan célebre carrera en donde el famoso Aquiles nunca puede llegar a alcanzar a la tortuga.

¿Qué es el infinito? Esta pregunta ha estado rondando por la historia de la humanidad desde tiempos antiguos, la cual se ha tratado de aclarar y responder desde diferentes puntos de vista. Desde la filosofía lo han hecho grandes pensadores como Demócrito, Parménides, Zenón, Anaximandro, Platón, Aristóteles, entre otros. Desde la teología están San Agustín de Hipona, Santo Tomás de Aquino. Desde las matemáticas lo han hecho autores como: Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, Weierstrass, Dedekin, David Hilbert, Kronecker, entre otros. Pero, ¿es tal su importancia?, o ¿tal es la necesidad del ser humano por adquirir el conocimiento?

El pensar en el infinito es cuestionarme, ¿siendo yo un ser finito, puedo contemplar la idea de algo realmente infinito? O solamente, a través de mi ser limitado cuando soy consciente de que habito en un mundo terrenal, un mundo sensible, un mundo finito, me doy cuenta a través de una detenida observación de todos y cada uno de los objetos que se encuentran a mi alrededor, detallando cada uno de sus componentes, contemplando la posibilidad de que alguno de ellos ilumine mis ideas, para que llegue de golpe, algo diferente, distinto de verdad, que me ayude en esta búsqueda imparable por encontrar una respuesta y poder hallar ejemplos claros que me ayuden a expresar de una manera coherente cómo comprender el infinito.

Me doy cuenta, después de solo encontrar unos pocos ejemplos, aprehendidos a través de unos largos años de estudio al pasar por una escuela, un colegio y una universidad, en donde comprendo el gran significado de la famosa frase de Ludwig Wittgenstein, que dice: “los límites de mi lenguaje son los límites de mi mundo”. Todo lo que percibo en este mundo, todo lo conocido, todo lo habitable, es imperfecto, limitado y finito, es decir, yo, como ser imperfecto, limitado y finito, no puedo comprender, ni mucho menos abarcar la realidad de lo que puede llegar a significar realmente “el infinito”. Este no habita un espacio, no tiene principio ni fin, es incorruptible.

ÁPEIRON EL INFINITO PARA PLATÓN Y PITÁGORAS

Por otro lado, al tener en cuenta la unidad del universo, sabemos que es infinita porque no nace ni muere, pero todas las cosas que devienen de él son finitas. De esta manera para Platón y Pitágoras “el infinito era *ápeiron*, el caos, el infinito carecía de medida: *metron*. La voz *ápeiron* tal como la emplea Anaximandro, significa *sin fin* o *sin límite*, suele traducirse como *lo infinito*, *lo indefinido*, *lo ilimitado*. La idea del infinito también fue rechazada por Aristóteles y los escolásticos, basados en las mismas contradicciones que el concepto de infinito generaba. Aristóteles trató de enfrentar el problema del infinito a través de dos representaciones, dos concepciones complementarias y cuya interacción dialéctica ha influido el propio desarrollo de la matemática. En el tercer libro de su obra *Física*, Aristóteles distingue dos tipos de infinito: el infinito como un proceso de crecimiento sin final o de subdivisión sin final y el infinito como una totalidad completa. El primero es el infinito *potencial* y el segundo el infinito *actual*. La noción de infinito potencial se centra en la operación reiterativa e ilimitada, es decir, en la recursividad interminable, por muy grande que sea un número natural siempre podemos concebir uno mayor, y uno mayor que este último y *así sucesivamente*, donde esta última expresión y «*así sucesivamente*» encierra la misma idea de reiteración ilimitada, al infinito. Este tipo de infinito potencial es el que sirve de base a la noción de límite del cálculo infinitesimal. Por su parte, la noción de infinito como totalidad fue ampliamente desarrollada en la geometría al dividir un segmento de recta en un número infinito de puntos y el infinito actual de los infinitesimales sirvió de soporte heurístico para la posterior formalización del cálculo infinitesimal”. (Ortiz, 1994).

Aun así, continua mi cuestionamiento, si miramos desde un punto de vista teológico, en donde se puede considerar el infinito como una propiedad exclusiva de un ser perfecto, San Agustín creía que solamente Dios y sus pensamientos eran infinitos, solo un ser perfecto como él puede comprender el significado del infinito, por lo cual, no hay posibilidad alguna desde la

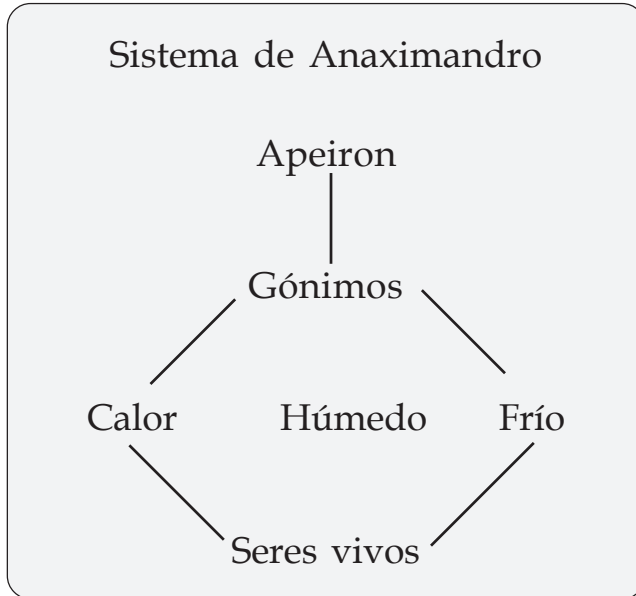


Imagen 1. Del Ápeiron de Anaximandro.

Tomada de <http://www.filosofia.org/cur/pre/axima.htm>

teología en que el hombre pueda adquirir el significado real de “lo infinito” y Santo Tomás de Aquino, quien decía que aunque Dios era ilimitado no podía crear cosas que fueran absolutamente ilimitadas. Así que mi incertidumbre comienza a ser más latente, al surgir unas preguntas más, ¿Por qué un ser perfecto, incorruptible como lo es Dios, no puede crear cosas iguales a él? ¿Es el infinito simplemente la representación de la esperanza del hombre por tener una continuidad permanente en el mundo?

EL INFINITO EN LA ANTIGÜEDAD: UNA PERSPECTIVA MATEMÁTICA

Al mirar a través de la historia, y poder apreciar los aportes de los grandes pensadores de Grecia sobre la gran incógnita que nos produce el tema de lo infinito, me encuentro con una opción más para tratar de comprender este cuestionamiento, y es a través de las matemáticas y sus paradojas que puedo llegar a ver como el concepto del infinito se ve más claramente al dar solución a algunos ejemplos claros de paradojas que tratan con el infinito, así como un recorrido, uso o padecimiento que han tenido algunos pensadores sobre el infinito. Aunque hoy día el aprendizaje de las matemáticas puras se inicia con el estudio de los conceptos fundamentales como números y sus propiedades,

conjuntos y sus propiedades, no siempre fue así, antes de Georg Cantor no todo se tenía tan estructurado y todas las nociones y propiedades actuales de conjuntos no existían. La idea de conjunto se establece como un pre-saber o idea intuitiva de colección o agrupación de ciertos elementos. Ahora el concepto de número, el cual está íntimamente ligado con los conjuntos, lo entendemos como la cantidad de elementos de una agrupación en particular. Lo que hoy día es trivial como por ejemplo: “se indica que todo conjunto tiene una cantidad dada de elementos y recíprocamente, para cualquier número natural n existe al menos un conjunto con n elementos” (Galera, 1995), un par de siglos atrás trasnochaba a muchos matemáticos de su época para poder dar una explicación razonable a este hecho.

Algo tan natural como el primer conjunto de números que conocen los niños en la escuela, el conjunto de los números Naturales, es tan traumático cuando se llega a estudios superiores ya que no comprenden su infinitud, no saben en que momento esos poquitos números se transformaron en una cantidad inagotable de ellos, es por esto que un concepto que debeló tanto tiempo para su descubrimiento, al cual Georg Cantor llega a definir casi por accidente ya que no estaba trabajando propiamente en esta teoría, sea hoy día tan incomprendido.

Creo que por la falta de precisión en la enseñanza del concepto del infinito es que resultan la mayor parte de los problemas para los estudiantes de cálculo a la hora de aprender numerabilidad y no numerabilidad, cardinalidad, convergencia, continuidad, etc.

Una estrategia ampliamente utilizada en matemáticas es, introducir una noción nueva a partir de las ya existentes, y lo que es aún más interesante es que se presenta como la negación de un concepto ya introducido, y esta es una de las maneras como se presenta el infinito, como la negación de lo finito, es por esto que infinito es todo aquello que no tiene fin, que no se termina que no tiene un límite, que es indefinido, que es muy grande. El infinito si no se ve con cuidado puede presentar algunas contradicciones como por ejemplo hay muchos conjuntos con límites y acotados que son infinitos, como por ejemplo el intervalo $[-1,1]$, si consideramos un conjunto con $2^{10000000}$ estaríamos ante un conjunto que es muy grande, pero que es finito.

A continuación se presenta una situación de los esfuerzos malos o buenos por tratar de explicar el concepto de infinito:

“Una anécdota que se escucha frecuentemente en la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica ilustra la forma en que se concibe el infinito de manera intuitiva: Sucedió durante una clase de Cálculo

Diferencial e Integral, cuando el profesor estaba desarrollando la teoría de límites al infinito y límites infinitos, un estudiante le preguntó: ¿Qué es el infinito? El Profesor le indicó, **El infinito es algo como esto....** Seguidamente tomó la tiza y comenzó a trazar una línea alrededor del aula dándole tres vueltas, luego sin dejar de trazar la línea, abrió la puerta y se fue... Los estudiantes se quedaron esperando pero el profesor no regresó. Cuando salieron vieron como la línea que el profesor trazó recorría las paredes, bajaba por las gradas y salía del edificio... A la clase siguiente, mientras los estudiantes esperaban la llegada del profesor, este se presentó trazando aún la línea con una tiza hasta llegar de nuevo a la pizarra y le dijo a los estudiantes: Bueno, esto no es el infinito pero al menos ya tienen una idea de lo que es....

Se ve que, aun cuando el profesor trató de dar un ejemplo bastante ilustrativo del infinito, siempre quedó encasillado en un ejemplo finito pero muy grande. El concepto de infinito no se puede formar a partir de metáforas como la anterior."

Es por lo anterior que se debe dar una definición rigurosa desde la matemática del concepto del infinito, aunque hasta antes de Georg Cantor se consideraba el concepto del Infinito como algo inaccesible y paradójico del cual nadie había podido ser claro y conciso a la hora de definirlo.

A lo largo de la historia grandes matemáticos han tratado de dar una definición del infinito, o más bien de considerar su existencia y de todas las posibles contradicciones que surgen de esta aceptación, como por ejemplo en la antigua Grecia tanto Aristóteles como Pitágoras y Platón pudieron aceptar la existencia del infinito, pero dadas todas las contradicciones que traía consigo la aceptación del infinito, Aristóteles decide rechazarla. Sin embargo, Aristóteles concibe el infinito de dos maneras diversas, las cuales son las nociones contemporáneas de esta noción. Aristóteles concibe un infinito potencial, este infinito potencial lo centró desde las operaciones ilimitadas y reiteradas, es decir una recursividad inagotable, este concepto de infinito es el adoptado en el desarrollo actual del concepto de límites al infinito y límites infinitos de los cálculos infinitesimal e integral, por otro lado al referirse al infinito actual, lo hace desde un infinito ya existente, un infinito como un todo o unidad y no como un proceso.

Es por esto que Kant se siente identificado con las nociones de Aristóteles, y aceptaba el infinito potencial, pero rechazaba el infinito actual, por ser imposible de ser alcanzado por la experiencia, ya que para Kant la experiencia era la manera de aprender los conceptos y en este mundo finito no podían concebir un todo como una parte infinita.

REPRESENTACIÓN DE ARQUÍMEDES DEL INFINITO

Para presentar un caso concreto con respecto a la aceptación del infinito potencial de Aristóteles, en la matemática moderna Arquímedes nos lo muestra con su propiedad Arquimediana, para indicar que, para cualquier cantidad N mayor que 0 , es posible hallar un número natural t de manera que al superponer t veces la unidad μ se tiene $t\mu > N$. De esta forma al tomar valores de N cada vez mayores es posible crear un proceso que tiende al infinito.

A continuación mostramos un esqueleto de este proceso:

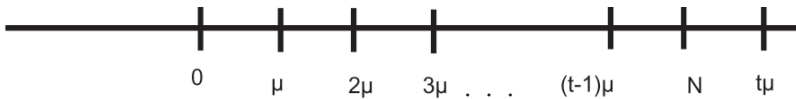


Imagen 2. Propiedad Arquimediana. Se representa el infinito potencial, donde se crece indefinidamente. Imagen realizada por el autor, desde sus conocimientos.

REPRESENTACIÓN DE XENÓN DEL INFINITO

Podemos presentar el infinito potencial de otra manera, más bien en un proceso inverso, no ir superando la longitud de un segmento dado μ , sino más bien ir dividiendo la longitud de un segmento μ a la mitad y nuevamente este segmento se divide por la mitad, y este proceso se continua reiteradamente hasta obtener una cantidad ilimitada de segmentos todos contenidos en el segmento unidad de longitud μ . Esta fue la idea que produjo la paradoja de Xenón.

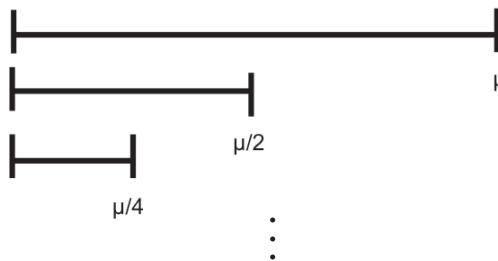


Imagen 3. Paradoja de Xenón. Se representa el infinito potencial, donde se decrece indefinidamente. Imagen realizada por el autor, desde sus conocimientos

Por otro lado, nos acercamos al punto coyuntural de este ensayo, la formalización de la noción del infinito actual o infinito como un todo, pero para esto se requiere todo el desarrollo de la teoría de conjuntos de Georg Cantor.

EL INFINITO DE G. CANTOR: FIN AL CUESTIONAMIENTO

Iniciamos con el tratamiento, o el uso que hace Georg Cantor en sus trabajos sobre el infinito. Cuando este termina sus estudios en Berlín y se va a trabajar a la Universidad de Halle, conoce a Heine, con el cual investiga en conjunto, sobre el problema del momento en cuanto a series trigonométricas se refiere, Georg Cantor resuelve este problema en el cual usa el concepto del infinito, pero el infinito potencial, (tomándolo como medida de acercamiento o alejamiento) para ir a los límites de lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande, desde ahí en adelante Georg Cantor en sus trabajos usa la noción intuitiva del infinito. Georg Cantor no es el único que lo hace, esto ya se veía en los matemáticos anteriores a él, los matemáticos desde la antigüedad se preocupaban y usaban la noción de infinito, como por ejemplo, Euclides en sus Elementos Libro 1, al definir la noción de línea en la cual el infinito aparece implícitamente; Weierstrass en su teorías de continuidad y límites, etc.

En el trabajo de Georg Cantor sobre Densidad y conjuntos Derivados se ve más marcado el uso del símbolo infinito y en los cuales necesita nuevos símbolos para las posibles combinaciones que realiza con este. Ya en esta etapa los trabajos de Georg Cantor no se dedican a completar huecos como lo hace con los números racionales, sino que trata de trabajar de pleno con el infinito al cual trata de darle vida, algo que existe en verdad.

Georg Cantor en el siglo XIX desarrolló la teoría de conjuntos y como resultado de operar con esta nueva teoría y definir operaciones en ella, emergió la teoría de números transfinitos, con lo que se presenta todo un acontecimiento para su época, ya que esto nos indica que la existencia de un infinito potencial que es como él lo venía trabajando presupone la existencia de un infinito actual. Ya que el germen de este ensayo es el infinito, presentamos las definiciones de cardinalidad o potencia de un conjunto, que motivan este concepto, dentro de una teoría matemática lo que le da el rigor científico esperado desde hace mucho tiempo.

Aunque Georg Cantor ya trabaja como todo científico aceptando un infinito como la acepción de una variable la cual crece o decrece tanto como se quiera, al cual llama infinito impropio, también trabaja con algunos infinitos a los cuales les da algún nombre en especial como por ejemplo, el infinito determinado que no es más que aquel punto alejado al infinito sobre el que se observan las propiedades de funciones complejas y se da cuenta que estas propiedades no se alteran al acercarse este punto, o simplemente especificar un punto que no esté alejado al infinito, que sea enteramente determinado.

Como es de nuestro conocimiento de los cursos recibidos en la carrera de matemáticas, se dice que dos conjuntos A y B son equipotentes o tienen la

misma cardinalidad, es decir que tienen el mismo número de elementos si existe una función biyectiva entre A y B. Como esta relación es de equivalencia se puede entrar a definir que un conjunto A tienen n elementos si A es equipotente con un subconjunto de los números Naturales de n elementos, y así decimos que A tiene n elementos o que el cardinal de A es n. Cabe anotar que en los trabajos originales de Georg Cantor toda esta terminología de conjuntos él la llamaba variedades de números, pero es con el nombre actual que he querido introducirla sin perder de vista o referencia el trabajo original.

Es por esto que toda la teoría de conjuntos o de variedades desarrolladas por Georg Cantor nos da las bases para poder trabajar como lo hacemos hoy día; podemos decir que un conjunto es infinito si no es finito, pero se sabía ya desde antes de Georg Cantor, con lo que no es nada nuevo. La definición con más rigor es que un conjunto es infinito si tiene interminables elementos, pues no, esa tampoco es una definición con mayor rigor, traducido al lenguaje actual se dice que un conjunto es infinito si podemos establecer una equivalencia entre el conjunto y el conjunto de los números naturales.

Georg Cantor desarrolló la teoría de números transfinitos con la cual logró salvar la contradicción de la aniquilación de los números finitos por el infinito, la cual dice que al sumarle a un número finito el infinito, el infinito predomina y aniquila al número finito. Para esto construye los números a los que llamó Números Ordinales mediante las siguientes reglas a las que él llamo principios de generación:

1. 0 es un ordinal.
2. Si a es un número ordinal, entonces su sucesor $a + 1$ es un ordinal.
3. Si se tiene una sucesión de ordinales $\{a\}$ entonces existe un último ordinal $\lim\{a\}$ el cual es mayor que todo a $\{a\}$.

De estos tres principios de generación se sigue que los números naturales son todos números ordinales. Más aún, el infinito potencial indicado por Aristóteles producto del proceso de contar es también un ordinal en virtud de la regla 3. A este ordinal se le denota por ω . La eliminación de los números finitos se salva mediante la regla 2 pues como ω es ordinal entonces su sucesor es un ordinal.

No ahondaré más sobre el transfinito ya que me salgo de los lineamientos iniciales de este artículo.

Es así que con el trabajo de Georg Cantor sobre el infinito se logra:

En primera instancia dar con rigor matemático una definición formal para el infinito, lo cual ataca con su teoría de variedades.

En segundo lugar se establece que hay variedad en los infinitos, que no todos son iguales en tamaño lo cual resuelve por medio de su teoría de números transfinitos. Dando esto solución a la paradoja de tener un conjunto infinito metido dentro de otro conjunto.

Es retomando estos conceptos, que matemáticos de primera línea posteriores a él, han sentado las bases de la matemática como la conocemos hoy. Cálculo infinitesimal, mecánica, teoría de funciones complejas, series de funciones.

Termino con uno de sus mayores contradictores de su época:

“L. Kronecker con su epigrama: **Dios ha creado los números naturales, el resto es trabajo del hombre** y su pitagorismo meticuloso que insiste en descartar el infinito, edificando toda la Matemática a partir de los números Naturales y realizando operaciones constructivas en número finito, se coloca entre uno de los representantes más radicales del Finitismo al rechazar el infinito como: . . . **futilidad perniciosa heredada de filosofías anticuadas y teologías confusas, pudiendo llegar sin él tan lejos como se quiera. . .**” (Galera, 1995).

Al mismo tiempo, Georg. Cantor escribía: **La Matemática es completamente libre en su desarrollo, y sus conceptos solo se ven restringidos por la necesidad de ser no contradictorios y están coordinados con los conceptos previamente introducidos mediante definiciones precisas. La esencia de la Matemática es su libertad**, prefiriendo siempre utilizar el término **Matemática libre**, al más generalizado **Matemática pura**.

REFERENCIAS

- Agradeciendo el apoyo para la elaboración de este artículo a J. M. Nova y a su hija Luciana N. R.
- Bermúdez, C. G. (2009). *G. Cantor Sistemas de números y conjuntos*. La Coruña, España: Universidade da Coruña.
- Galera, M. C. (1995). La Controversia entre L. Kronecker y G. Cantor acerca del Infinito. En: *Divulgaciones Matemáticas* 3 (1/2), pp. 115-120. Maracaibo, Venezuela: Universidad de Zulia.
- Ortiz, J. R. (1994). El concepto de Infinito. En: *Boletín Vol. I, Número 2*, pp. 59-81. Caracas, Venezuela. Versión Electrónica, editor Oswaldo Araujo.
- Ramón, O. (1994). *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana Vol. 1, Número 2*, pp. 59-81. Caracas, Venezuela. Versión Electrónica, editor Oswaldo Araujo.