SOLUCIÓN COMO FUNCIÓN LINEAL APROXIMADA EN UN REDUCIDO INTERVALO DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN CON FUNDAMENTO EN EL PROBLEMA DE CAUCHY

The solution as a linear function approximation in a reduced interval of first order differential equations based upon the cauchy problem

CARLOS M. MATA RODRIGUEZ[1]

Recibido:17 de abril de 2018. Aceptado:28 de mayo de 2018
DOI: http://dx.doi.org/10.21017/rimci.2018.v5.n10.a46

Resumen

La aproximación es, como todos sabemos, una forma inexacta que es suficientemente lógica para ser útil. En cálculos tecnológicos, las aproximaciones juegan un papel fundamental en el momento de mostrar los resultados, pues los valores exactos difícilmente se obtienen. En matemáticas la aproximación específicamente se aplica a cálculos numéricos, y en forma más sofisticada a objetos tales como las funciones matemáticas. El ajuste de curvas se encuentra dentro de este análisis como un problema de aproximación; un caso muy co-nocido es el del método de los mínimos cuadrados, en el que se busca una recta que se ajuste perfectamente a una serie de puntos previamente calculados. Y es precisamente sobre funciones matemáticas, especialmente la función lineal, que se utilizará como expresión de cálculo, en este trabajo, para obtener una aproximación lo suficientemente exacta en la solución de ecuaciones diferenciales de la forma dy/dx = f(x,y) que no pueden ser resueltas mediante los métodos clásicos.

Palabras clave- Ecuaciones Diferenciales, Problema de Cauchy, Funciones Lineales, Matrices, Método de los mínimos cuadrados.

Abstract

The approximation is, as we all know, an inexact form that it is sufficiently logical to be use-ful. In technological calculations, the approximation plays a fundamental role in the moment of showing the results, because the exact values are difficultly obtained. In mathematics, the approximation is specifically applied to numeric calculations, and, in more sophisticated forms, to such objects like mathematical functions. The adjustment of curves is included in this analysis as a problem of approximation. A very well-known case is the one of the method of the minimum squares, in which is searched a straight line that adjust perfectly to a series of previously calculated points. And it is, in fact, on mathematical functions, especially on the lineal function, that it will be used in this article, as expression of calculation, to obtain an approximate sufficiently exact in the solution of differential equations in the form dy/dx = f(x,y) that cannot be resolved by the classic methods.

Keywords- Differential Equations, Cauchy problem, Linear equations, Matrices, Method of least squares.

1 Profesor Licenciado en Matemáticas. Consultor para la Formación de Personal en Informática. Miembro de la ANIR (Asociación Nacional de Inventores y Racionalizadores). Actualmente Departamento de Matemáticas, Universidad de Ciego de Ávila. Cuba. Correo electrónico: camaro@unica.cu

I. Introducción

Todos los conocedores del tema referente a las ecuaciones diferenciales ordinarias, sabemos que en el proceso de hallar su solución, la misma puede expresarse en forma analítica o mediante una tabla de valores [1]. Ocurre con mucha frecuencia que en problemas de aplicaciones prácticas, la posibilidad de encontrar una solución analítica (esto es la función solución de la ecuación diferencial) puede ser altamente compleja o imposible, por lo que la aplicación de los métodos numéricos resuelve tales situaciones [2] [3].

A pesar de la diversidad de los métodos analíticos, la mayoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias no pueden resolverse por esta vía. Recapitulando sobre lo anterior proponemos el siguiente ejemplo: Sea la ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$$

Al resolverla obtenemos la solución general de la ecuación:

$$y = 2 + Ce^{-x^2}$$

Si es necesario determinar una solución particular, debemos agregar una condición inicial, con más precisión: un punto cartesiano que conocemos pertenece a la solución, para el ejemplo: y(0) = 1. Sustituyendo en la solución general los valores de x e y correspondientes, llegamos a la solución particular [4]:

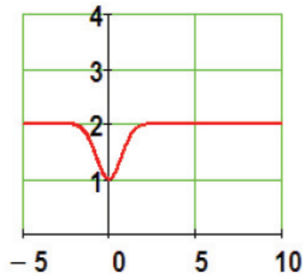
$$y = 2 - \frac{1}{e^{x^2}}$$

La introducción de las condiciones iníciales, recibe el nombre del Problema de Cauchy y consiste en resolver una ecuación diferencial sujeta a ciertas condiciones. (Valores iníciales).

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}}$$

El matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857), realizó importantes contribuciones en la teoría de las ecuaciones diferenciales [1] [5].

Representemos la gráfica de la solución obtenida.



Es fácil observar que la función solución tiende a y = 2.

En el ejemplo anterior la ecuación diferencial pudo ser resuelta analíticamente con lo cual se obtuvo una solución particular con base a las condiciones iníciales, la dificultad de obtener esta solución se presenta cuando la ecuación debe ser resuelta por métodos numéricos, por lo que no podemos hallar su solución analítica, es por ello, que pretendemos determinar una función lineal [6] de aproximación en un reducido intervalo que permita calcular con notable precisión los puntos cartesianos contenidos en dicho espacio.

Vamos ahora a proponer la solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x} + y}{\ln(x)}$$

Sujeta a las condiciones: y(2) = 3

La ecuación no puede ser resuelta por métodos analíticos, por lo que calcularemos su solución numérica en forma tabular, aplicando el método de Runge-Kutta 4 [4] al llegar a este punto es nuestro deseo hallar una función lineal (aplicando los mínimos cuadrados [7] [8]) que represente en forma muy aproximada la solución de la ecuación diferencial, en un determinado intervalo, con este proceder podemos calcular valores de y en la vecindad del punto seleccionado P(2,3).

Todo el procedimiento será calculado en Mathcad [9], siendo el objetivo primordial determinar la función lineal de la forma:

$$y = mx + n$$

También es de mucha utilidad la determinación del coeficiente de correlación lineal, que permitirá establecer la exactitud de los cálculos a realizar [8].

Se ha tomado un intervalo de cálculo [2,2.6] y un incremento de 0.1, que puede ser menor, para lograr mayor exactitud.

Como se podrá observar al final en la gráfica comparativa, existe una notable congruencia entre los puntos que representan la tabulación de los cálculos y la función de aproximación.

II. Desarrollo

Ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x} + y}{\ln(x)}$$

Condiciones iníciales

$$y(2) = 3$$

Lo anterior constituye el problema de Cauchy.

Intervalo de tabulación:

I [2,2.6]

Incremento o paso:

INC = 0.1

Datos para el cálculo:

$$x_0 = 2$$
$$y_0 = 3$$
$$INC = 0.1$$
$$xF = 2.6$$

El programa RK4, transfiere a la MATRIZ definida por Q, la tabulación de los resultados [9].

$$\boxed{Q = RK4\,(x_0, y_0, INC, xF)}$$

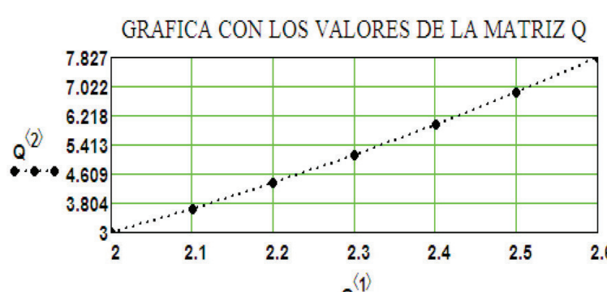
```
(H ← INC)
z ← 1
while  x0 ≤ xF + H
    K1 ← H·f(x0, y0)
    K2 ← H·f(x0 + H/2, y0 + K1/2)
    K3 ← H·f(x0 + H/2, y0 + K2/2)
    K4 ← H·f(x0 + H, y0 + K3)
    r(z,1) ← x0
    r(z,2) ← y0
    y0 ← y0 + (K1 + 2·K2 + 2·K3 + K4)/6
    x0 ← x0 + H
    z ← z + 1
r
```

TABULACION DE LOS RESULTADOS

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2.1 & 3.663 \\ 2.2 & 4.379 \\ 2.3 & 5.151 \\ 2.4 & 5.981 \\ 2.5 & 6.872 \\ 2.6 & 7.827 \end{pmatrix}$$

N= rows (Q) = 7 Número de filas

Con los datos obtenidos utilizando el pro-grama RK4, representamos los puntos de la Matriz Q.



Procedemos a calcular la función lineal representativa en base a la tabulación obtenida.

$$f(x) = mx + n$$

donde m es la pendiente de la recta y n el intercepto con el eje Y[7][8]. En la matriz Q la columna 1, representa x, la columna 2 a y.

$$m = \frac{\left[\sum xy - \frac{\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{N}\right]}{\left(\sum x^2\right) - \frac{\left(\sum x\right)^2}{N}}$$

$$\mathbf{n = \overline{y} - m\overline{x}}$$

$$m = \frac{\sum_{j=1}^{N}\left[\left(Q^{\langle 1\rangle}\right)_j \cdot \left(Q^{\langle 2\rangle}\right)_j\right] - \frac{\sum_{j=1}^{N}\left[\left[\left(Q^{\langle 1\rangle}\right)_j\right] \cdot \sum_{j=1}^{N}\left[\left(Q^{\langle 2\rangle}\right)_j\right]\right]}{N}}{\sum_{j=1}^{N}\left[\left[\left(Q^{\langle 1\rangle}\right)_j\right]\right]^2 - \frac{\left[\left[\left[\sum_{j=1}^{N}\left[\left(Q^{\langle 1\rangle}\right)_j\right]\right]\right]\right]^2}{N}} = 8.035$$

$$n = \frac{\sum_{j=1}^{N}\left[\left(Q^{\langle 2\rangle}\right)_j\right]}{N} - m \cdot \frac{\sum_{j=1}^{N}\left[\left(Q^{\langle 1\rangle}\right)_j\right]}{N} = -13.226$$

Cálculo del coeficiente de correlación lineal[8].

$$cc = \frac{\sum_{j=1}^{N}\left[\left(Q^{\langle 1\rangle}\right)_j \cdot \left(Q^{\langle 2\rangle}\right)_j\right]}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N}\left[\left[\left(Q^{\langle 1\rangle}\right)_j\right]\right]^2 \cdot \sum_{j=1}^{N}\left[\left[\left(Q^{\langle 2\rangle}\right)_j\right]\right]^2}} = 0.978$$

(cc es una medida estadística que cuantifica la dependencia lineal entre dos variables, es decir, si se representan en un diagrama de dispersión los valores que toman dos variables, el coeficiente de correlación lineal señalará lo bien o lo mal que el conjunto de puntos representados se aproxima a una recta). En forma modular:

$$|cc| \leq 1$$

Con los valores de m, n formamos la matriz M[6].

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}$$

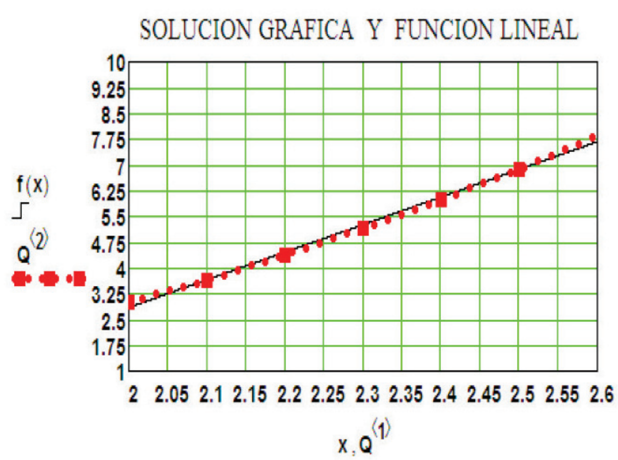
Aplicando sumatoria, llegamos a la función lineal.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2}\left(M_i \cdot x^{2-i}\right)$$

$$\boxed{f(x) \rightarrow 8.0353\,x - 13.2141}$$

Se debe precisar que la función lineal obtenida, no constituye en modo alguno la función solución de la ecuación diferencial ejemplificada, es solo una aproximación en el intervalo previamente indicado.

Podemos observar como la tabulación de los puntos y el segmento gráfico de la función lineal, presentan notable coincidencia en el intervalo [2,2.6] tal como era de esperarse teniendo en cuenta el valor del coeficiente de correlación (cc = 0.978).



III. Conclusiones

Si se nos plantea el problema de hallar una solución particular a la ecuación diferencial ordinaria dy/dx = f(x,y) y que pase por el punto (x0,y0) (Problema de Cauchy), puede suceder que no exista método apropiado para resolver dicha ecuación, en tal situación debemos recurrir a algún medio que nos permita calcular una aproximación de la solución buscada. La aproximación mediante una función lineal en un reducido intervalo, puede resolver dicha problemática.

Nota: Los cálculos fueron comprobados con MAPLE, utilizando el método de Runge-Kutta-Fehlberg.

Referencias

[1] E. L. Ince, Ordinary differential equations, Longnans-Green, Londres, 1927.

[2] S. Bugrov, Ecuaciones diferenciales, MIR, Moscú, 1981.

[3] N. Piskunov, Cálculo Diferencial e Integral, tomo II, MIR, Moscú, 1969.

[4] Kaplan, Wilfred, Ordinary differential equations, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1958.

[5] Cain, William, A brief course in the calculus, D, Van Nostrand Company, New York, 1905.

[6] Seymour, Lipschutz, Algebra Lineal, Mc Graw-Hill, New York, 1973.

[7] Borovk, A, Estadística Matemática, MIR, Moscú, 1988.

[8] Spiegel, Murray. Stephens, Larry, Estadística, Cuarta edición, Mc Graw-Hill, México, 2008.

[9] MathCad Guide Mathematical Tools. Numerical Methods.