https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

RESOLUCIÓN TRIGONOMÉTRICA DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Solving a trigonometric equation using the quadratic formula

CARLOS M. MATA RODRÍGUEZ[1]

Recibido:30 de mayo de 2017. Aceptado:07 de junio de 2017

DOI:http://dx.doi.org/10.21017/rimci.2017.v4.n8.a30

Resumen

En el desarrollo histórico de las Matemáticas, existen determinados temas (especialmente relacionados con el arte del cálculo), que en un período de tiempo relativamente largo son ampliamente usados y después debido al desarrollo tecnológico desaparece su importancia. La solución trigonométrica de la ecuación de segundo grado, es uno de ellos, y constituye el tema del presente trabajo.

Palabras clave: ecuación cuadrática, trigonometría.

Abstract

There are certain topics, in the historical development of Mathematics (especially, related to the art of calculation) that, in a relatively long period of time have been widely used, and later, due to the technological development, their importance faded. The trigonometrical solution for the equation of second grade is one of them, and it is the topic of the present work.

Keywords: *quadratic equations, trigonometric.*

I. Introducción

Se denomina ecuación una igualdad entre dos expresiones matemáticas que solo se verifican para ciertos valores de la variable; estos valores se denominan raíces de la ecuación. Resolver una ecuación es encontrar los valores de estas raíces. Si las expresiones son algebraicas, se dice que la ecuación es algebraica y si una de ellas al menos es trascendentes se dice que es trascendente [1] [2].

La solución algebraica de una ecuación no puede ser obtenida más allá de las de cuarto grado, *resueltas algebraicamente las ecuaciones de los cuatro primeros grados por medio de radicales desde el siglo XVI parecía natural intentar la solución análoga para las ecuaciones de grados superiores; pero todas las tentativas de numerosos matemáticos, especialmente de José Luís Lagrange (1736-1813), fracasaron. Este constante fracaso hizo sospechar la imposibilidad del problema perseguido, llegando Paolo Ruffini (1765-1822) a demostrarlo en 1798; y más tarde -1824- dio Niels Henrik Abel (1802-1829) independientemente otra demostración de esta imposibilidad* [2] esto quiere decir que no existen reglas, como la conocida ecuación de segundo grado, que brinden los valores de las incógnitas en función de los coeficientes, de un modo general.

Y es precisamente sobre la solución de la ecuación de segundo grado el fundamento de este trabajo.

Como se conoce, la forma canónica de la ecuación de segundo grado es $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ siendo los coeficientes a, b y c constantes.

Puesto que en la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ siempre se supone que **a** es distinto de cero, se puede dividir la ecuación por el referido coeficiente y toma la forma:

[1] Profesor Licenciado en Matemáticas. Consultor para la Formación de Personal en Informática. Miembro de la ANIR (Asociación Nacional de Inventores y Racionalizadores). Actualmente Departamento de Matemáticas, Universidad de Ciego de Ávila. Cuba. Correo electrónico:camaro@unica.cu

$$x^2 + (b/a)\,x + (c/a) = 0$$

A partir de la expresión anterior se llega mediante transformaciones algébricas a la clásica forma general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Que admite siempre dos raíces: $\mathbf{x_1, x_2}$

II. Desarrollo

Hay temas en la historia de las Matemáticas, que son ampliamente utilizados en un largo período de tiempo y posteriormente caen en desuso, como lo es, el uso de los logaritmos, en el pasado para realizar cálculos complejos mediante el uso de las tablas, desde su invención por John Neper, (1550-1617) [2] hasta las primera décadas del siglo XX, fueron una herramienta fundamental de los calculistas; como es sabido el empleo de los modernos medios de computo, relego a los logaritmos a cuestiones eminentemente teóricas o analíticas.

La solución trigonométrica de la ecuación cuadrática, corrió igual suerte, pues fue utilizada especialmente cuando sus coeficientes en determinados problemas de trigonometría esférica y astronomía, estaban representados por números decimales de varias cifras o sus correspondientes logaritmos, siendo de este modo muy práctica la resolución por medio de tablas trigonométricas [3] [4] [5] [6].

Este método, aparece por primera vez en la obra del astrónomo Antonio Cagnoli (1743-1816) "*Trigonometría piana esférica*", Paris, 1786 pero hay que destacar que fue de bastante utilidad hasta principios del siglo XX [7].

El objetivo del siguiente trabajo es mostrar el fundamento analítico y práctico para el cálculo de las raíces de una ecuación de segundo grado utilizando procedimientos trigonométricos en la ecuación $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$.

Vamos a considerar dos casos fundamentales, siendo a = 1 [1] [2].

A. Primero: c < 0;

Las dos raíces son reales de signos contrarios.

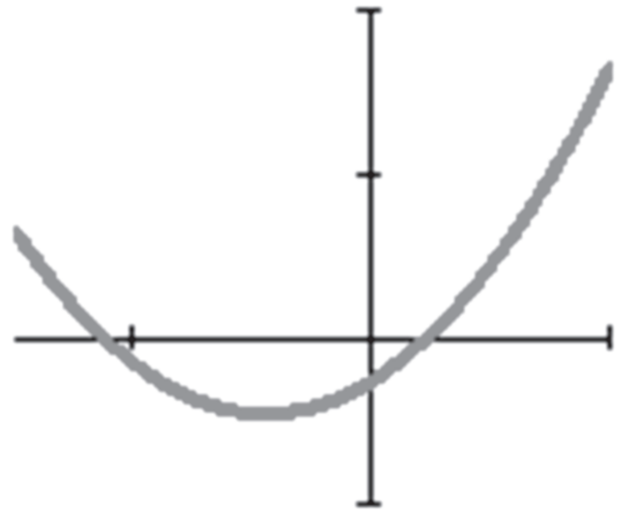


Fig. 1.

Comencemos definiendo la siguiente igualdad:

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha = -4\frac{c}{b^2} \qquad (1)$$

Tenemos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$x = \frac{-b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$x = \frac{-b}{2} \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{b^2}\cdot(b^2 - 4c)\cdot b^2}}{2}$$

$$x = \frac{-b}{2} \pm \frac{b\cdot\sqrt{\left(1 - 4\frac{c}{b^2}\right)}}{2}$$

$$x = \frac{-b}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4c}{b^2}}\right) \quad (2)$$

Aplicando identidades y utilizando la ecuación (1),

$$tg^2\alpha = \sec^2\alpha - 1$$

$$x = \frac{-b}{2}\left(1 \mp \sqrt{\sec^2\alpha}\right)$$

$$x = \frac{-b}{2}\left(1 \mp \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}\right)$$

$$x = \frac{-b}{2}\left(1 \mp \frac{1}{\cos(\alpha)}\right)$$

Con todo lo anterior, obtenemos,

$$\boxed{\begin{aligned} x1 &= \frac{-b}{2}\left(1 - \frac{1}{\cos(\alpha)}\right) \\ x2 &= \frac{-b}{2}\cdot\left(1 + \frac{1}{\cos(\alpha)}\right)\end{aligned}} \quad (3)$$

Aplicando nuevamente identidades llegamos a las fórmulas prácticas.

$$\boxed{\begin{aligned} x1 &= \sqrt{-c}\cdot\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ x2 &= -\sqrt{-c}\cdot\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned}} \quad (4)$$

Ejemplo No. 1

Sea la ecuación.

$8.363x^2 + 0.594x - 2.167 = 0$

Solución.

Dividiendo por 8.363

$x^2 + 0.071x - 0.259 = 0$

b = 0.071, c = - 0.259

Sustituyendo en (1)

tg (α) = 14.336

α = Arctg (14.336)

$\alpha \approx$ 86 ºC

Sustituyendo en (3) - (4)

X1 = 0.47

X2 = - 0.54

B. *Segundo: c > 0*

Las dos raíces reales son positivas o negativas.

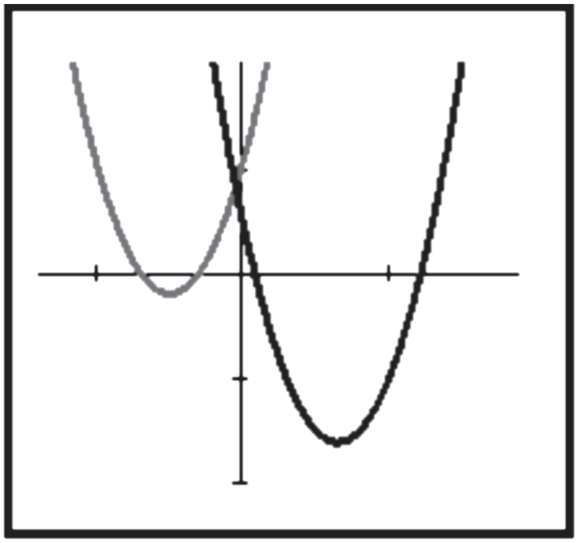


Fig. 2.

Partiendo de la igualdad:

$$\sin^2\alpha = 4\frac{c}{b^2} \quad (5)$$

Y utilizando la identidad

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

En (2) obtenemos

$$\boxed{\begin{aligned} x1 &= \frac{-b}{2}\,(1 - \cos(\alpha)) \\ x2 &= \frac{-b}{2}\,(1 + \cos(\alpha)) \end{aligned}} \qquad (6)$$

Aplicando identidades

$$\boxed{\begin{aligned} x1 &= -\sqrt{c}\cdot\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ x2 &= -\sqrt{c}\cdot\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}} \qquad (7)$$

Nota: En el caso tratado ($c > 0$) se ha supuesto $b > 0$, si fuese $b < 0$, basta cambiar el signo de las raíces.

Ejemplo No. 2

$x^2 + 3.45x + 2.16 = 0$

$b = 3.45$, $c = 2.16$

($b > 0$, reales negativas)

$$\alpha = \mathrm{ArcSen}\left(\frac{2\cdot\sqrt{2.16}}{3.45}\right)$$

$$\alpha = 58.43\ ^{o}C$$

$$X1 = -0.8218$$

$$X2 = -2.6280$$

III. Programación en MATHCAD

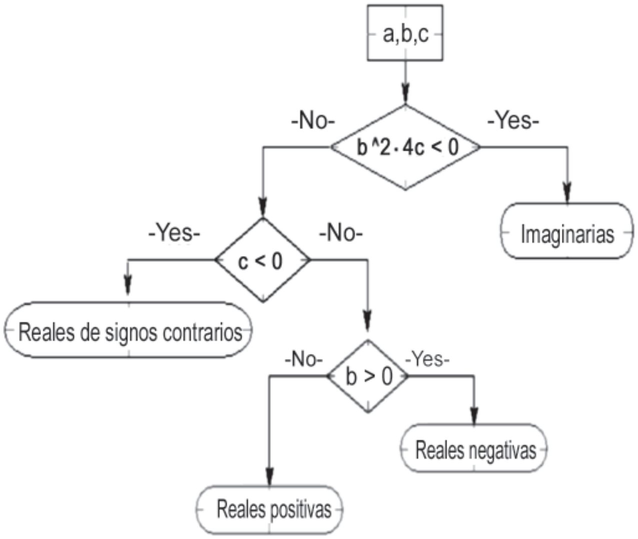
Como complemento a todo lo anterior se presenta un programa diseñado en Mathcad para la obtención de las raíces de la ecuación de segundo grado en forma trigonométrica.

Para la corrida del programa solo es necesario definir en **ESG** (nombre del programa) los coeficientes a, b y c.

Aquí se consideran las soluciones reales, no incluyendo las imaginarias.

```
ESG(A1, B1, C1) := | return "No es cuadrática" if A1 = 0
                   | return "b = 0" if B1 = 0
                   | return "c = 0" if C1 = 0
                   | A ← A1/A1
                   | B ← B1/A1
                   | C ← C1/A1
                   | return "Imaginarias" if B^2 − 4·C < 0
                   | s1,1 ← "Angulo γ ="
                   | s2,1 ← "x1="
                   | s3,1 ← "x2="
                   | s4,1 ← "a"
                   | s5,1 ← "b"
                   | s6,1 ← "c"
                   | if C < 0
                   |   | α ← 2·√(−C) / B
                   |   | β ← atan(α)
                   |   | γ ← |β·180/π|
                   |   | x1 ← √(−C)·tan((γ/2)·deg)
                   |   | x2 ← −(√(−C)·cot((γ/2)·deg))
                   | if C > 0
                   |   | α ← 2·√C / B
                   |   | β ← asin(α)
                   |   | γ ← |β·180/π|
                   |   | if B > 0
                   |   |   | x1 ← −√C·tan((γ/2)·deg)
                   |   |   | x2 ← −(√C·cot((γ/2)·deg))
                   |   | if B < 0
                   |   |   | x1 ← √C·tan((γ/2)·deg)
                   |   |   | x2 ← √C·cot((γ/2)·deg)
                   | s1,2 ← floor(γ)
                   | s2,2 ← x1
                   | s3,2 ← x2
                   | s4,2 ← A1
                   | s5,2 ← B1
                   | s6,2 ← C1
                   | s
```

C. Diagrama de flujo sintetizado



Considerando las ecuaciones seleccionadas como ejemplo, el programa muestra los siguientes resultados.

Ejemplo No. 1

$$\mathrm{ESG}(8.363, 0.594, -2.167) = \begin{pmatrix} \text{"Angulo } \alpha = \text{"} & 86 \\ \text{"x1="} & 0.47476 \\ \text{"x2="} & -0.54579 \\ \text{"a"} & 8.363 \\ \text{"b"} & 0.594 \\ \text{"c"} & -2.167 \end{pmatrix}$$

Ejemplo No. 2

$$\mathrm{ESG}(1, 3.45, 2.16) = \begin{pmatrix} \text{"Angulo } \alpha = \text{"} & 58 \\ \text{"x1="} & -0.82188 \\ \text{"x2="} & -2.62812 \\ \text{"a"} & 1 \\ \text{"b"} & 3.45 \\ \text{"c"} & 2.16 \end{pmatrix}$$

Como comprobación utilizando el comando ***RESOLVER*** de Mathcad, verificamos que:

$$8.363 \cdot x^2 + 0.594 \cdot x - 2.167 \text{ resolver } \rightarrow \begin{pmatrix} -0.545 \\ 0.4747 \end{pmatrix}$$

$$x^2 + 3.45 \cdot x + 2.16 \text{ resolver } \rightarrow \begin{pmatrix} -2.628 \\ -0.8218 \end{pmatrix}$$

IV. Conclusión

La solución trigonométrica de la ecuación de segundo grado, fue en su momento una alternativa para el cálculo de las raíces de las ecuaciones cuadráticas, los modernos medios de computo, han relegado este tema, así como otros a cuestiones netamente históricas pero no por ello deja de ser interesante su conocimiento pues constituye parte del patrimonio de la historia de las Matemáticas.

El tema tratado presenta muy escasa bibliografía, pues cuando aparece solo son brevísimas menciones sin mayores detalles.

En algunos textos de Algebra del siglo XIX y principios del XX se muestran solo determinados artículos asociados a la Teoría de las Ecuaciones.

El procedimiento trigonométrico también se extiende a determinados tipos de ecuaciones de tercer y cuarto grado, como se muestra en el articulo *Application of trigonometry to the Teory of Equations.*

Referencias

[1] H. S. Hall and S. R. Knigth, *Algebra for Collages and Schools*, New York, The Macmillan Company, 1941.

[2] H. S. Hall and S. R. Knigth, *Álgebra Superior*, México. UTHEA, 1948.

[3] M. Chollet, *Tablas de logaritmos,* Paris, Garnier y Hermanos, 1902.

[4] H. S. Hall and S. R. Knigth, *Elementary Trigonometry*, London, The Macmillan Company, Fourth Edition, 1905.

[5] G. Hessenberg, *Trigonometría Plana y Esférica*, Editorial Labor, Barcelona, 1925.

[6] J. Rey, *Elementos de Análisis Algebraico*, Madrid, Talleres Lusy, 1939.

[7] J. E. Hofmann, *Historia de la matemática: desde el comienzo hasta la revolución francesa*, Editorial Limusa, 2002.