UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA BASADA EN EL APRENDIZAJE AUTÓNOMO

A proposal for the teaching of the derivative based in autonomous learning

ALFONSO GÓMEZ MULETT[1]

Recibido:16 de mayo de 2017. Aceptado:30 de mayo de 2017

DOI:http://dx.doi.org/10.21017/rimci.2017.v4.n8.a28

Resumen

Este trabajo presenta una propuesta para la enseñanza de la derivada en un curso universitario de cálculo, con el propósito de proveer un método participativo basado en el aprendizaje autónomo. La ejecución de la propuesta propone un método de cuatro fases apoyado en trabajo guiado, el aprendizaje significativo y el trabajo colaborativo; finalmente, se anotan algunas recomendaciones para alcanzar el éxito de la propuesta después de realizarse una validación con dos grupos de estudiantes, la cual reveló la necesidad de preparar previamente los estudiantes para aprender autónomamente.

Palabras clave: Enseñanza de la matemática, derivada, aprendizaje autónomo, aprendizaje significativo.

Abstract

This paper presents a proposal for the teaching of derivate in a academic course of calculus, in order to provide a participatory approach based on autonomous learning. The implementation of the proposal exhibits a four-phase method supported on significative learning and collaborative work; finally, some recommendations are noted for success of the proposal, after validation performed with two groups of students, which revealed the need to prepare in advance for students to learnautonomously.

Keywords: Mathematics teaching, derivate, autonomous learning, significative learning.

I. Introducción

En el aprendizaje del cálculo la primera dificultad que aparece es el concepto de límite. Abstraer la noción de límite es un reto para el estudiante que empieza en el estudio de la matemática universitaria, el cual crece en complejidad al ser aplicado a la definición de derivada, donde se relacionan aspectos geométricos y físicos. Definir la derivada a partir del concepto de límite exige al estudiante enfrentarse a la abstracción y la transferencia de dicho concepto, generalmente en términos geométricos; por una parte, la abstracción posibilita aprender a aprender matemática; la transferencia, transportada al concepto de pendiente de una recta, en este caso tangente a una curva, lleva el estudiante a aplicar el concepto en situaciones específicas.

Con el objeto de superar las dificultades señaladas, varios investigadores han presentado propuestas sobre la enseñanza de la derivada, teniendo en cuenta diferentes puntos de vista. Para destacar algunos trabajos recientes, Álvarez [1] propone trabajar la derivada con base en problemas geométricos, García [2] plantea un modelo para la comprensión del concepto de derivada, Lozano [3] propone la enseñanza de la derivada obviando la noción de límite, Cardona [4] elabora una propuesta basada en la razón de cambio como teoría

[1] Doctor en Educación, Magister en Matemáticas aplicadas, profesor Programa de Matemáticas Universidad de Cartagena, Colombia. Correo electrónico: agomezm1@unicartagena.edu.co

base y Martínez y Calao [5] implementan un sitio web para la enseñanza del cálculo con un variado repertorio de estrategias de software, opciones de consulta y empleo de tics.

A pesar de los esfuerzos realizados por resolver el problema de la enseñanza de la derivada, las dificultades aún existen, en parte porque los textos utilizados en los cursos de cálculo diferencial son bastante similares en la presentación de los contenidos, sacrifican el desarrollo conceptual para dar espacio al trabajo algorítmico y su mecanización mediante la solución de ejercicios [6]; pero esto no es una excusa para lograr una buena enseñanza, ya que la responsabilidad en la conducción de los procesos de enseñanza y aprendizaje recae en el profesor, como elemento clave en el éxito de la implementación de cualquier propuesta didáctica [7], de allí que con esta propuesta se presenta una alternativa para ayudar a la solución del problema relacionado.

II. Aprendizaje autónomo

Cuando se habla de aprendizaje autónomo es necesario entrelazar dos conceptos: aprendizaje y autonomía; pero no basta solo con entrelazarlos, también se debe analizar y describir el entorno circundante de estos dos conceptos, y tomar las condiciones necesarias para hacer el enlace teniendo en cuenta las posibles implicaciones del concepto.

Aunque la autonomía es un concepto bastante antiguo, fue Jean Piaget en 1932 quien hizo notar su importancia en el ámbito educativo. En *El juicio moral del niño* hace una amplia exposición de este término y lo encuadra en el desarrollo cognitivo, en términos generales la autonomía se refiere a la competencia que tiene cada quien para comportarse de acuerdo con su concepción acerca de la vida, la moral, la sociedad y lo ético, esto es contrario a entender la autonomía como individualismo, egoísmo o libertinaje. Aunque Piaget habla de autonomía como meta o punto de llagada del desarrollo individual en las distintas dimensiones de la actividad de la persona como son lo moral, lo social y lo intelectual, autonomía es también la base de de la dignidad de la naturaleza humana, es aquello por lo cual actuamos de acuerdo con nuestros propios criterios, convencidos de lo que hacemos sin atentar contra los demás, entonces, la autonomía es algo por lo cual luchamos y vamos ganando poco a poco en el transcurrir de nuestras vidas; la autonomía se refiere entonces a una moral fundamentada en el respeto mutuo, la solidaridad y la reciprocidad [8].

Considerando la autonomía dentro de lo moral, ella implica la capacidad del individuo para emitir juicios morales, tomar decisiones propias, valorar sus acciones y emitir juicios sobre lo correcto y lo incorrecto con base en los principios de justicia, trascendencia, honestidad y valor de la vida; la autonomía implica negociación con otro u otros en busca de beneficios de interés común. Dentro de lo intelectual la autonomía implica la capacidad que debe tener el individuo para conocer su potencial cognitivo, explorarlo y desarrollarlo a través de la investigación y la autoevaluación, es decir, somos autónomos intelectualmente cuando podemos progresar en la construcción de nuestros conocimientos [8].

Concibiendo el aprendizaje como un "proceso intrapersonal e interpersonal de carácter social, cultural y disciplinar que está anclado contextualmente y no puede extenderse sino dentro del sistema interactivo de elementos que lo producen" [9]; y la autonomía, como capacidad de transformación en cada individuo para producir nuevas informaciones y aprender significativamente [10] o como poder de decisión para mantener o reubicar las estructuras conceptuales de acuerdo con el punto de vista individual, contrastándolo con las otras personas, la articulación de estos dos conceptos permite establecer un tipo particular de aprendizaje llamado aprendizaje autónomo. Como proceso intrapersonal necesita de la automotivación, autorregulación, aceptación de responsabilidades, definir objetivos y metas, organizar el tiempo, aprender de manera independiente, aprender de manera significativa y acoger nuevas formas de aprender involucrando estrategias adecuadas; es decir, aprender a aprender.

De acuerdo con lo expresado, "el aprendizaje autónomo es un proceso educativo que estimula al alumno para que sea autor de su propio desarrollo y en especial que construya por si mismo su conocimiento"[11]; es un proceso donde el estudiante autorregula su aprendizaje y toma conciencia de sus propios procesos cognitivos y socio-afectivos, entendiendo la toma de conciencia como metacognición [12]; el aprendizaje autónomo es un aprendizaje independiente, autorregulado, consciente, progresivo, autocrítico y emancipatorio, en el cual un individuo que interactúa con su medio se convierte en profesor de sí mismo para ir en la búsqueda de su propia instrucción o educación. Un aprendiz autónomo además de aprender contenidos o conocimientos debe aprender el aprendizaje mismo, aprender a aprender, para pasar de una orientación dirigida a una auto orientación.

Lo anterior quiere decir que el aprendizaje autónomo se desarrolla de acuerdo con las capacidades o estructura cognitiva de cada persona, permite en todo momento enfrentar al individuo a la toma de decisiones, depende de la motivación intrínseca, implica relaciones con las demás personas de manera cooperativa, permite la autorregulación y la autoevaluación, motiva la solidaridad, permite hacer planes sobre lo que se desea estudiar, fortalece el sentido de responsabilidad y se realimenta a sí mismo según los riesgos de las decisiones tomadas [13].

Según Aebli [14], para convertirse en un aprendiz autónomo la persona debe estar en capacidad de:

A. Establecer contacto, por sí mismo, con cosas e ideas.

B. Comprender por si mismo fenómenos y textos.

C. Planear por sí mismos acciones y resolver problemas.

D. Ejercitar actividades por sí mismo, manejar información mentalmente.

E. Mantener la motivación para la actividad y para el aprendizaje.

Teniendo en cuenta lo expresado hasta ahora, puede decirse que el aprendizaje autónomo lleva al individuo a actuar por su propia cuenta, despertando en él la motivación intrínseca para actuar para autodirigirse y actuar en forma independiente, además, con sus atributos y factores de éxito se considera como una alternativa para formar individuos autónomos capaces de protagonizar su propio aprendizaje, capaces de tomar decisiones acertadas y capaces de emprender buenas acciones para sí mismo y para la sociedad a la cual pertenecen, capaces de autoevaluarse, de adquirir habilidades para comunicarse con los demás, de mantener una reestructuración conceptual permanente, de controlar sus emociones, de asumir un rol de estudiante independiente, de ejercer control valorativo, de aprender a aprender y de desarrollar sus propias estrategias [15].

III. Aprendizaje autónomo y matemática

En el caso del aprendizaje de la matemática debe tenerse en cuenta que su método de construcción es el deductivo; no obstante, antes de llegar a la deducción la matemática toma en parte algunos supuestos del método científico, esto es, primero se observa la ocurrencia de un hecho matemático, se prueba varias veces la misma ocurrencia en diferentes situaciones, se generaliza la ocurrencia mediante una ley o teorema, se demuestra la validez del teorema y luego se derivan algunas inferencias a partir de este aplicándolo a casos particulares.

Aprender matemática no es solamente hacer deducciones a partir de una acumulación de segmentos de información, colocados en una secuencia ordenada y rígida utilizando conceptos y procedimientos; aprender matemática es también activar los conocimientos en torno a procesos cognitivos dinámicos hacia la expansión de esos conocimientos, es abstraer, es inventar, es resolver problemas, es conjeturar, es aplicar y transferir para encontrarle un verdadero sentido a esos conocimientos [16].

Para lograr aprender matemática debe ponerse en ejecución un conjunto coordinado de técnicas o tácticas de aprendizaje y habilidades o destrezas, que lleven a la utilización de recursos de pensamiento para alcanzar un aprendizaje autónomo. Estas técnicas de aprendizaje incluyen elaboración de esquemas, resúmenes, ensayos, reescritura, etc., de las cuales debe saberse por qué, cómo y cuándo utilizarlas a fin de que el aprendizaje cumpla una función auto reguladora [12]. El logro del aprendizaje demanda entrenar a los alumnos enfrentándolos a situaciones complejas para que estos desarrollen su autonomía y su creatividad, promuevan su pensamiento crítico y la imaginación para que ellos aprendan por sí solos con la orientación del profesor, evitando los excesos para no atentar contra la creatividad y la autonomía.

Lo anteriormente señalado indica que el docente debe ser un guía que conduzca a una creatividad meticulosamente concebida y planeada en torno a la motivación, el reforzamiento de la autoestima y el compartir las experiencias, teniendo en cuenta que la autonomía como finalidad de la educación implica el no poder predecir exactamente los resultados esperados debido a errores que deben ser aprovechados para estimular el pensamiento creativo reduciendo el temor a equivocarse.

Expuesta la importancia de la autonomía en el desarrollo de la matemática, es necesario considerar que el conocimiento lógico matemático se construye a través de un proceso de abstracción. Piaget [17] distinguió dos tipos de abstracción: la empírica y la reflexiva, siendo esta última la responsable de la construcción del conocimiento lógico matemático, entonces puede decirse que sin abstracción no se aprende a aprender matemática y con esto no se están negando otros asuntos básicos necesarios como la intuición, lo empírico y lo heurístico; la abstracción es la prueba de haber logrado aprender pero a través de un proceso en el cual necesariamente se ha tenido en cuenta los otros aspectos y etapas o niveles dentro de la construcción del saber matemático.

En el nivel básico, el papel del maestro es mostrar ciertos procedimientos para ayudar al niño en el desarrollo cognoscitivo de la ideas matemáticas y en la construcción de la teoría con base en lo concreto para llegar a lo abstracto; en el nivel medio, la enseñanza y el aprendizaje incluyen una apreciación de las razones que justifican las construcciones logrando la abstracción; en el nivel superior, el aprendizaje de la matemática se concibe como investigación y descubrimiento mediante la utilización explícita de los principios cognitivos, en este nivel se concibe que el objeto de estudio de la matemática son los conceptos abstractos [18].

Los diferentes niveles de educación o de construcción del conocimiento, siguen el camino de lo concreto a lo abstracto. Lo concreto se refiere a un conjunto de estrategias agrupadas con el nombre de heurística [19]; esta juega un papel importante en el descubrimiento de las teorías matemáticas, se identifica con el descubrimiento, el ensayo, la observación, la experimentación teórica; con base en ella, un estudiante autónomo debe resolver problemas con relativa facilidad y descubrir qué puede hacer y hasta dónde puede llegar; para ello, debe dar libertad a su creatividad y a la imaginación relacionando lo concreto con lo abstracto [20].

La solución de problemas facilita el aprendizaje autónomo del cálculo diferencial siempre que los alumnos sean capaces de aplicar los conocimientos en una situación particular, previo establecimiento de precondiciones esenciales y se mantengan las expectativas de éxito para la motivación. La solución de problemas a través de ejemplos adecuados involucra la aplicación de la teoría relacionando conceptos; es decir, transporta conocimientos, habilidades, estrategias o predisposiciones de un contexto a otro. En investigaciones sobre la enseñanza del cálculo [3], se ha comprobado ciertas dificultades con la conceptualización de la derivada como límite; también se ha comprobado existen ciertas dificultades con la conceptualización de algunos temas y en particular con el concepto de derivada como límite [2]; también se ha justificado, que mientras el estudiante no tenga los conceptos previos claros como el de límite, tendrá dificultades para entender el concepto de derivada [21].

El sentido común del concepto de límite se convierte en una barrera difícil de sobrepasar que dificulta a veces la solución de problemas donde se aplica la derivada, y es aquí donde se pone a prueba la capacidad de los alumnos para resolver dichos problemas. Los profesores, como mediadores del aprendizaje, deben enfatizar en el fomento de actividades que conduzcan al logro de la transferencia a través de la solución de problemas, proporcionando oportunidades para que el estudio se convierta en una ingeniería de conocimientos, comenzando con la apropiación de la teoría, la ejercitación de conceptos y la aplicación teórica de estos como requisitos previos para transferir a partir de la metodología para resolver problemas [22].

IV. Enseñanza de la derivada

El espectro de las investigaciones sobre temas relacionados con el cálculo, y en particular con la enseñanza de la derivada es bastante amplio como se había señalado anteriormente. La construcción del concepto de derivada se vuelve en ocasiones difícil, inclusive para estudiantes de ingeniería, debido a la complejidad de procesos que intervienen en el cálculo: abstracción, demostración, generalización, representación, interpretación, entre otros [23]; en este mismo sentido Moreno [7], afirma que las acciones encaminadas para enseñar la derivada, están aún lejos de suponer una verdadera comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo, situación observada cuando el estudiante debe transferir el concepto en situaciones prácticas.

Por otra parte, la matemática enseñada en el nivel medio de educación se caracteriza por el dominio de los procesos finitos y el manejo algorítmico e instrumental, y aunque el último curso del currículo de matemática corresponde al cálculo diferencial e integral, su introducción se hace de manera mecánica, calculándose derivadas de funciones mediante la manipulación directa de fórmulas aprendidas de memoria, sin tener una idea clara del trabajo realizado [1]. Así las cosas, los estudiantes aprenden la derivada de esta manera, porque los docentes en su mayoría se limitan a transmitir los conceptos tal como aparecen en los libros sin un análisis de estos dedicando el mayor tiempo de la clase a la repetición de algoritmos con ejercicios [24], olvidándose de que la derivada está atada a una red de conceptos: función, límite, recta tangente, incremento, variación, razón de cambio y velocidad, sin los cuales es difícil lograr su comprensión.

En el panorama actual de los problemas relacionados con la enseñanza del cálculo, tanto en la enseñanza media como en la universitaria se presenta aún muchos interrogantes, relacionados con la dificultad de los estudiantes para la comprensión del concepto de derivada, dificultad proveniente de otras dificultades esenciales. Se consideran dificultades esenciales las presentes en conceptos relacionados con procesos infinitos como los límites, sucesiones y series, derivada e integral [25].

Según Dolores [6], el aprendizaje de la derivada se dificulta porque en los contenidos de los libros de cálculo se sigue un enfoque abstracto, guardando poca relación con los aspectos geométricos y físicos que motivaron la definición de derivada debido a la falta de orientaciones metodológicas. Por otra parte, algunos profesores en el medio universitario dan por supuesto que partiendo de las definiciones matemáticas y su ilustración a través de la solución de ejercicios y problemas, se garantiza la enseñanza efectiva de los contenidos matemáticos.

Para Catsigeras [26], las mayores dificultades en el aprendizaje de los estudiantes al ingreso en las carreras universitarias están en el curso de cálculo diferencial, por ser este un curso formal con contenidos estrictos aparentemente sencillos pero desconectados en principio de las experiencias cotidianas; además, los textos presentan los conceptos en su forma más elaborada, haciendo invisible el proceso para llegar hasta ese punto.

Entre algunas de las propuestas para superar las dificultades en el aprendizaje de la derivada en un primer curso universitario de cálculo puede citarse a Dolores [27], basada en la comprensión del concepto a partir de las ideas variacionales; Carabús [28], propone estudiar la derivada a partir de la noción de razón de cambio; y apartándose un poco del enfoque clásico presente en la mayoría de los textos de cálculo, Vargas, Torres y Quintero [29] plantean una propuesta para la enseñanza de la derivada basada en la definición de Caratheodory.

Examinando las propuestas referenciadas para la enseñanza, se nota cierto sesgo hacia lo tradicional, donde la responsabilidad es asumida por el profesor [15]. Cambiando un poco de dirección, y pretendiendo que el estudiante aprenda a aprender y aprenda significativamente, se plantea aquí una secuencia didáctica para la enseñanza de la derivada basada en el aprendizaje autónomo, estudiando los contenidos estandarizados sobre la derivada, tal como aparecen en los libros tradicionales de cálculo, teniendo en cuenta que en definitiva el estudiante es quien aprende, aprovechando los recursos bibliográficos a su disposición.

V. Planteamiento de la propuesta

En virtud de que el trabajo autónomo del estudiante puede llevarse a cabo mediante una variedad de métodos [30], y el aprendizaje es "construcción del sentido del conocimiento donde se privilegian los procesos por medio de los cuales el estudiante codifica, organiza, elabora, transforma e interpreta información" [30], el propósito de esta propuesta es desarrollar en los estudiantes habilidades metacognitivas, cognitivas y hábitos académicos para la aplicación del concepto de derivada en la solución de problemas geométricos, físicos y de variación; adicionalmente, lograr la transferencia del concepto de derivada en la solución de problemas mediante el aprendizaje autónomo y la solución de problemas. La metodología de trabajo propuesta se desarrolla en cuatro fases, cada una de ellas consta de contenidos, intencionalidad, actividades previas, actividades de desarrollo y actividades de cierre, con sus respectivas instrucciones.

1) **Primera fase: Apropiación del concepto de derivada**

La aproximación a la derivada parte del concepto de tasa de variación en los contextos geométrico y físico de manera específica como pendiente de la secante y velocidad media respectivamente. Estas situaciones problémicas son aproximadas a la velocidad instantánea y pendiente de la recta tangente, y mediante aproximaciones sucesivas involucrando el límite de una función primero intuitivamente y luego formalmente, se llega a la definición de derivada.

Contenido: El origen del cálculo, recta tangente a una curva, velocidad instantánea, definición de derivada y relación entre derivada y continuidad.

Intencionalidad: Inferir la derivada como límite de una razón incremental, asociar el concepto de derivada con el concepto de límite, relacionar pendiente de la recta tangente a una curva con la derivada y adquirir habilidades para interpretar lecturas matemáticas.

Actividades previas: Revisar los conceptos de recta secante y tangente, ecuación de la recta.

Actividades de desarrollo: Hacer surgir el concepto de derivada.

Actividades de cierre: Reafirmar la conceptualización y verificar el aprendizaje utilizando estrategias de elaboración que impliquen conectar el concepto de límite con el de derivada.

2) **Segunda fase: Extensión del concepto.**

La definición de derivada se aplica para obtener las fórmulas del álgebra de derivadas.

Contenido: Derivada de sumas, productos y cociente de funciones; derivada de la función potencial.

Intencionalidad: Obtener fórmulas para las operaciones con funciones, aplicar las fórmulas y esclarecer dudas sobre los procedimientos algebraicos utilizados.

Actividades previas: Activar conceptos previos sobre suma, producto y cociente de funciones; leyes de exponentes, simplificación algebraica y binomio de Newton.

Actividades de desarrollo: Deducir las fórmulas para la derivada de suma, producto y cociente de funciones.

Actividades de cierre: Aplicar las fórmulas obtenidas a través de ejercicios utilizando aprendizaje autónomo, aprendizaje colaborativo y tutoría.

3) **Tercera fase: Aplicación teórica de los conceptos.**

Similar a la fase anterior, el concepto de derivada es transferido a funciones compuestas e implícitas.

Contenido: Regla de la cadena, función definida en la forma implícita, derivación implícita, derivada de potencias racionales, derivadas de orden superior.

Intencionalidad: Identificar funciones expresadas en forma explícita e implícita, entender la aplicación de la regla de la cadena, calcular la derivada de una función expresada en forma implícita, aplicar la derivada implícita para obtener la derivada de una potencia racional.

Actividades previas: Realimentar las reglas de derivación obtenidas en la fase dos, activar el concepto de función compuesta.

Actividades de desarrollo: Análisis de la regla de la cadena, utilizar la regla de la cadena en la obtención de la derivada implícita, aplicar la derivada implícita en la obtención de la derivada de una potencia racional, obtención de las derivadas de orden superior de una función.

Actividades de cierre: Afianzamiento de los conceptos adquiridos con ejercicios.

4) **Cuarta fase: Transferencia de aprendizaje.**

El concepto de derivada es aplicado a situaciones donde se presentan problemas que involucran la transferencia del concepto.

Contenido: Recta tangente y normal a una curva, velocidad y aceleración, problemas de variables relacionadas.

Intencionalidad: lograr que el estudiante haga la transferencia del concepto de derivada en la solución de problemas relacionados con el contenido a estudiar, activar la metacognición, aplicar la metodología de Polya [22] [33] en la solución de pro- blemas, discutir en pequeños grupos la solución de problemas.

Actividades previas: Estudiar la metodología de Polya para resolver problemas, hacer realimentación de la ecuación de la recta.

Actividades de desarrollo: Mostrar ejemplos de aplicación, resolver problemas de aplicación primero en forma colaborativa y luego autónomamente utilizando la metodología de Polya, revisar el proceso metacognitivo empleado para llegar a la solución de un problema.

Actividades de cierre: Síntesis plenaria de los contenidos desarrollados, reflexión en pequeño grupo y en plenaria sobre el aprendizaje significativo logrado, auto reflexión para revisar la metacognición como estrategia del control de la comprensión.

En cada fase se da un conjunto de instrucciones que deben seguirse en la realización del trabajo individual y grupal, los materiales a utilizar se escogen previamente, para ello puede recurrirse a un texto guía o se elabora material pertinente con el tema; los ejercicios deben seguir una secuencia gradual de dificultad para llevar el estudiante al aprendizaje autónomo. Cada actividad de cierre incluye autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación. Esta última debe diseñarse en forma tal que corresponda a la intencionalidad, teniendo en cuenta que lo fundamental es la apropiación que haga el estudiante de la metodología del trabajo.

VI. Validación en la práctica

Es pertinente resaltar, que antes de validar la propuesta se hizo un trabajo introductorio de ambientación para el aprendizaje autónomo, utilizando la metodología de la clase integral [31], donde la intervención del profesor se da al comienzo de cada clase y luego el trabajo previamente planeado se lleva a cabo en pequeños grupos, con una actividad de control al final de cada sesión. Después de lo anterior, se realizó una prueba piloto con los dos grupos de estudiantes de primer semestre de ingeniería a los cuales se aplicó la fase previa en el tema precedente, límite y continuidad de una función.

El primer grupo estuvo conformado por 18 estudiantes todos ellos con el libro de texto y herramientas computacionales y el segundo por 42 estudiantes teniendo solamente el libro de texto como recurso. Cada grupo recibió una guía de trabajo donde se especificaba el trabajo a realizar durante dos semanas, con cinco horas de clase por semana. Al iniciarse el trabajo hubo dificultades debido al alto grado de dependencia que mostraron los estudiantes, ya que la costumbre es recibir clases magistrales; no obstante, después de algunas orientaciones la implementación de la estrategia avanzó con algunos tropiezos durante la ejecución de las tres primeras fases, notándose una tendencia hacia la mecanización de algoritmos y conceptos en vez de la aprehensión del concepto de derivada.

Después de la primera fase los estudiantes asimilaron el método de trabajo, observándose un progreso gradual en el aprendizaje autónomo [32] y una tendencia a desaprender la forma tradicional de enseñanza; no obstante, hubo algunas dificultades en la comprensión de las demostraciones debido a que la palabra demostrar era algo novedoso para los estudiantes [33]; además, entender la lógica de la demostración, apoyados en el sentido común, se convirtió en un obstáculo para entender los aspec- tos formales de la matemática.

VII. Conclusiones

La propuesta diseñada presenta una alternativa para sustituir la enseñanza tradicional transmisionista e instrumental, utilizando un método participativo de enseñanza basado en el aprendizaje autónomo [33], con la mediación del aprendizaje significativo, buscando que el estudiante pueda activar sus habilidades metacognitivas, cognitivas, comunicativas, emocionales y sociales, en benefi- cio de conseguir hábitos académicos mejorando el avance conceptual.

El éxito de la propuesta depende de la motivación alcanzada por el estudiante y la realización de un adecuado proceso de evaluación durante la ejecución, encaminado a la adquisición de un alto grado de responsabilidad académica por parte del estudiante; también depende del cumplimiento de las tareas asignadas y el empeño del profesor en orientar con acierto las diferentes tareas consignadas en la planeación.

Con base en los resultados de la validación puede decirse que se superó la dificultad de conceptualización de la derivada asociada al concepto de pendiente, estableciéndose su significado como un límite particular aplicado a una razón incremental en un proceso infinito desde lo infinitamente pequeño, sin encontrar diferencias significativas entre los grupos, pues la tenencia de computadores no fue determinante en la adquisición del concepto, ya que no hubo énfasis en los aspectos numéricos. La transferencia del aprendizaje se logró satisfactoriamente.

Finalmente, no debe olvidarse que es el estudiante quien aprende con ayuda de sus representaciones mentales y sus conceptos previos [26]. Aprender autónomamente implica un proceso constructivo interno, del cual el mismo individuo es el responsable, impulsado por la automotivación y controlado por la metacognición.

Referencias

[1] D. Álvarez, H. Colorado, H. and L. Ospina. Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. *Revista Ciéntifica, Edición especial*, pp.104-110, 2013.

[2] M. García. Derivada: una propuesta para su comprensión. [*Actas de la XIII CIAEM*], Recife-Brasil. Recuperado de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/2056/901, 2011

[3] Y. Lozano. *Desarrollo de la derivada sin la noción de límite*. Tesis de titulación. Universidad Konrad Lorenz, Bogotá, 2011.

[4] R. Cardona. *Una propuesta para la enseñanza de la derivada como razón de cambio en estudiantes de undécimo grado*. Tesis de maestría. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2011.

[5] C. Martínez, C and G. Calao. Aplicación del sitio web "Virtual Mates" en la enseñanza de las matemáticas. *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, vol. 8, pp.1-11, 2012.

[6] C. Dolores. Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En Cantoral, R (Ed.), *El futuro del cálculo infinitesimal*. Grupo Editorial Iberoamérica, México, pp.155-181, 2000.

[7] M. Moreno. El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: Evolución, estado actual y retos futuros. *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM),* Universidad de Córdoba, España, pp.81-96, 2005.

[8] C. Kamii. La autonomía como finalidad de la educación. Implicaciones de la teoría de Piaget. Chicago: Universidad de Illinois, 1984.

[9] J. Torre Puente. *Una triple alianza para un aprendizaje universitario de calidad*. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas, 2007.

[10] G. Feldman. *Psicología*. México: McGraw-Hill, 1996.

[11] L. Insuasty. *Aprendizaje autónomo*: Bogotá: Cafam, 1997.

[12] M. Crispín and otros trece autores. *Aprendizaje autónomo. Orientaciones para la docencia*. México: Universidad Iberoamericana, 2011.

[13] H. Aebli, Aprendizaje autónomo. Madrid, Narcea S.A, 1984.

[14] H. Aebli, Factores de la enseñanza que favorecen el aprendizaje autónomo. Madrid: Narcea S. A, 1988.

[15] M. Elías. and otros ocho autores. *Promotion social and emotional learning*. Virginia: Alexandria, 1997.

[16] A. Ruiz. *Enfoques y métodos de la educación matemática*. Costa Rica: Universidad de Costa Rica, 1998.

[17] J. Piaget. *La formación del símbolo en el niño*. Madrid: Fontanella, 1961.

[18] L. Santos. ¿Qué significa el aprender matemáticas? Una experiencia con alumnos de cálculo. *Educación Matemática*, vol. 7, no 1, pp.45-53, 1995.

[19] A. Aliseda, A. *Heurística, hipótesis y demostraciones en matemáticas.* Ámsterdam: Instituto de

Investigaciones Filosóficas Universidad de Ámsterdam, 1998.

[20] A. Aliseda, A. *Seeking Explanations: Abduction on logic, philosophy of science and artificial intelligence.* Amsterdam: Instituto de Investigaciones Filosóficas Universidad de Ámsterdam, 1977.

[21] A. Sierpinska. Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 18, no. 4, pp.371-387, 1985.

[22] G. Polya. *Cómo resolver problemas*. México: Editorial Trillas, 1998.

[23] A. Engler and A. Camacho. Una mirada a investigaciones sobre la derivada desde la perspectiva del pensamiento y lenguaje variacional. *Premisa*, vol. 14, no. 54, pp.18-36, 2012.

[24] C. Moreno and P. Ríos. Concepciones en la enseñanza del cálculo. *Sapiens*, vol. 7, no. 2, pp.25-39, 2006.

[25] C. Azcárate, C and M. Camacho. Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*. Vol. 10, no. 2, pp.135-149, 2003.

[26] E. Catsigeras. (2004). *Microexperiencia de enseñanza en Cálculo.* Publicado en las [*Actas del II Congreso de Enseñanza, ponencia 1-033*]. Montevideo: CD– UEFI, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República. Recuperado de http://math-preprints. wikispaces.com/file/view /congreso2004 ponencia. pdf

[27] C. Dolores, El desarrollo del pensamiento variacional con estudiantes universitarios. En Beitía, G. (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14, 345-353. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 2001.

[28] O. Carabús. *Ingenierías Didácticas. La comprensión en la conceptualización del Cálculo*. Catamarca, Editorial Científica Universitaria, 2007.

[29] A. Vargas, M. Torres and N. Quintero. La derivada a la Caratheodory, una nueva concepción en la enseñanza del cálculo. 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Pasto, 2009.

[30] C. Fraile. El estudio y trabajo autónomo del estudiante. En De Miguel, M (Ed.), *Métodos y modalidades de enseñanza centradas en el desarrollo de competencias*. Madrid: Alianza Universidad, pp.191-223, 2006.

[31] H. Viale. Menos es más. Cómo Propiciar el aprendizaje autónomo mediante una clase integral en el marco del Modelo Pedagógico UPC. *Revista Digital de Investigación en Docencia Universitaria*, vol. 3, no. 1, pp.1-15, 2007.

[32] W. G. Hernández. La depuración como competencia en la formación del profesional informático. Revista de Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información Vol. 4 / Núm. 7 / enero-junio de 2017; pág., 4(7), 57-69. http://dx.doi.org/10.21017/rimci.2017.v4.n7.a22 2017.

[33] H. Hernández Cruz. La lúdica en el aula de ingeniería. Revisión de experiencias. *Revista Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de La Información*, *2*(3). Recuperado a partir de http://ojs.urepublicana.edu.co/index.php/ingenieria/article/view/239. 2015.