PARADOJAS SEMÁNTICAS Y LÓGICAS

Semantic and Logical Paradoxes

MAGDALENA PRADILLA RUEDA*

Recibido: 27 de Febrero de 2015. Aceptado: 15 de Abril de 2015

Resumen

La teoría de conjuntos, planteada por Cantor, hacia 1890, se considera el soporte de la construcción matemática, de manera que la Aritmética pasa a ser un caso particular de la teoría de conjuntos, el de los conjuntos enumerables. Sin embargo, en su aplicación emergen paradojas[a] o contradicciones que se manifiestan en las superestructuras de la teoría lógica y matemática. Los lógicos matemáticos de ese momento reflexionan sobre esta noción, analizando y aportando soluciones al respecto, que marcan lineamientos para la consolidación de la semántica lógica y de la lógica, en general.

Palabras clave: paradojas semánticas, paradojas lógicas. semántica lógica, lógica.

Abstract

Set theory, put forward by Cantor is considered mathematical, by 1890 construction support, so that the arithmetic becomes a special case of set theory, the enumerable sets. However, pursuant to its emerging paradoxes or contradictions that manifested in the superstructures of the logical and mathematical theory. The mathematical logic of this time reflects on this notion, analyzing and providing solutions that set guidelines for the consolidation of the logical semantics and the general logic.

Keywords: semantic paradoxes, logical paradoxes, logical semantic, logic.

I. Introducción

El poeta filósofo cretense, Epiménides (VI siglo, a.C.) afirma: «todos los cretenses son mentirosos». Asumiendo, como propósito del argumento la mentira de todas las expresiones de los otros cretenses, encontramos una paradoja: si lo que Epiménides dice era verdad, tendría que ser una mentira, si lo que él dijo que era mentira, hace que su expresión sea verdad. Los ciudadanos de Creta han olvidado desde entonces las palabras del filósofo pero la Lógica desde el punto de vista lógico, ha recobrado grandes aportes.

De esta manera, a finales del siglo XIX, a raíz de la aplicación de la Teoría de Conjuntos presentada por Cantor, resurgen paradojas en el centro mismo de la Lógica y la Matemática, como la paradoja de clases de Russell: «hay dos tipos de clases: aquellas que se contienen a ellas mismas (la clase de clases) como uno de sus elementos y aquellas que no se contienen a ellas mismas (la clase de los caballos no es un caballo)», esto nos lleva a preguntarnos: ¿la clase de las clases presentada en la segunda clase es en realidad de la primera o de la segunda clase? Es decir ¿se contiene ella misma o no se contiene?, lo que nos lleva a una contradicción.

* Doctor en Informática y Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales, Universidad de Grenoble (Francia), 1983. Tesis: *Búsqueda de Descriptores en Indexación Automática*; Doctor en Filosofía, Universidad Paris 1- Panthéon Sorbonne, 2008. Tesis: *Hacia una Epistemología de la Teoría Informática*. Actualmente Docente Investigadora de la Corporación Universitaria Republicana. Correo electrónico: magdapradilla@gmail.com

a Paradoja viene del griego paradoxos (para: contra y doxa: opinión): opinión contraria a la opinión común.

Es entonces, este tipo de reflexiones que va a ocupar a los lógicos como Russell y Whithead, Richard, Alfred Tarski, Kripke, …etc.

Nuestras preguntas se refieren a las causas lógicas de estas paradojas, su distinción entre paradojas lógicas y semánticas y el por qué de esta distinción y finalmente las soluciones propuestas en el núcleo de la semántica realizadas por Tarski y Russell y sus aportes en general a la Lógica y particularmente a la Semántica.

II. Contexto lógico de las paradojas

La Teoría de Conjuntos de Cantor[b], permite la correspondencia entre diferentes conjuntos, realizando una biyección entre elementos (uno a uno: 1-1). Si ésta es posible, quiere decir que los conjuntos son «iguales en número», o que tienen el mismo número cardinal. De manera que, las colecciones susceptibles de hacer la correspondencia biunívoca con los números naturales se llaman infinitas enumerables, como los números naturales, enteros positivos, cuadrados de enteros positivos, los números racionales (0, 1, -1, ½, 1/3, -1/2, 2, -2, -1/3, ¼, ...).

No obstante, existen otros conjuntos, los conjuntos infinitos no-enumerables, que no tienen correspondencia con los números naturales. Cantor va a demostrar que existen potencias superiores a la enumerable, en donde el método de demostración podía explicarse para cualquier potencia [1] (p. 23).

Uno de los casos de conjuntos infinitos no-enumerables es el conjunto de funciones aritméticas a una sola variable, por ejemplo, las funciones de una sola variable a que recorre el conjunto de los números naturales, con valores en el conjunto de los números naturales.

Cantor desarrolla, entonces, la Teoría de Conjuntos Abstractos en la cual trata de conjuntos de diferentes tipos[c] . Él define [2] (p. 481) conjunto como: «toda colección M de objetos m diferenciados por nuestra percepción o nuestro pensamiento (esos objetos serán llamados elementos de M)»[d]

La teoría cantoriana de conjunto se desarrolla sobre una base de carácter lógico, porque los conjuntos se pueden concebir como extensiones de conceptos, aunque Cantor plantea que los conjuntos existen independientemente de los conceptos. La noción de conjunto en general, sugiere la operación de totalizar y por esta vía introduce el infinito actual diferente del infinito potencial[e] .

En ese momento, los matemáticos presentan reticencias ante estos planteamientos, Gauss en 1831, no utiliza dimensiones infinitas como realidades finitas, porque nunca se ha permitido en Matemáticas hasta ese momento (Gauss pensaba en magnitudes infinitas, mientras que Cantor empleaba colecciones infinitas); Brouwer, plantea que el concepto de conjunto infinito, inclusive el

---

b Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor (1845 Saint Petesbourg-1918 Halle), matemático alemán, conocido por ser el creador de la teoría de conjuntos. Establece la importancia de la biyección entre los conjuntos, define los conjuntos infinitos y los conjuntos bien ordenados; prueba que los números reales son más numerosos que los enteros naturales. El teorema de Cantor implica la existencia de una infinidad de infinitos, define los números cardinales, los ordinales y la aritmética transfinita.

c Cantor, Georg (1895-1897), *Beiträge zur Begründung der transfiniten, en Mathematische Annalen 46 (1895), 481-512; 49 (1897);* reimpreso en 1932. Traducido al francés: *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*, por F. Marotte. In Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux, reeditado por Gabay, Paris, 2000. Estas publicaciones fueran las últimas contribuciones significativas de la teoría de conjuntos. El primer artículo define los conjuntos, sub-conjuntos, etc. de la manera que se conoce hasta hoy, la aritmética de cardinales y ordinales. En el segundo artículo define la teoría de conjuntos bien ordenados y la de los ordinales.

d Citado por Kleene (1998, p.191)

e Cantor, define el infinito potencial en contraposición al infinito actual, nociones que eran conocidas desde la antigüedad, por los griegos. *Anaximandro* (611-547? a. C.) consideraba el Infinito como potencialidad, lo indeterminado, ilimitado, es decir lo continuo; *Platón* (427-347 a.C.), al contrario se refería al Infinito actual, describiendo la *forma*, *el número*, etc.; en el Medioevo, el infinito es potencial y hace referencia a Dios; y en los desarrollos contemporáneos se encuentran las dos corrientes, así:

- Infinito potencial: Conjunto infinito N (naturales), no existe; Conjunto finito si existe N= $1, 2, ...% y es potencialmente infinito.
- Infinito actual es exclusivamente para conjuntos operativamente cerrados:
- Números naturales (constructivismo): para cada número natural es posible señalar un sucesor por tanto no hay fin: S0=1; SS0=2. Cada uno de estos números (por grande que sea) puede señalarse en forma completa, mientras que eso no es posible para el conjunto N.
- Conjuntos que se pueden definir en base de procedimientos o algoritmos.

potencial, requiere otra clase de lógica diferente a la clásica [3] (p. 192).

Finalmente, hacia 1890, la teoría de conjuntos se considera el soporte de la construcción matemática, de manera que la Aritmética pasa a ser un caso particular de la teoría de conjuntos, el de los conjuntos enumerables. Sin embargo, en su aplicación emergen paradojas o contradicciones que se manifiestan en las superestructuras de la teoría; contradicciones que se ven en las respuestas tanto negativas como positivas a preguntas como: «¿el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen ellos mismos como elementos, se contiene él mismo como elemento?». Respuestas que representan la falta de validez de la coherencia formal de la totalidad de la teoría, lo que llama la atención hacia la falta de solidez de los fundamentos de la teoría de conjuntos y de las Matemáticas, en general[f].

Si bien, la existencia de contradicciones o paradojas, en el seno de las Matemáticas, asciende a la antigüedad (Megáricas tales como la del Mentiroso o Eleáticas como las relativas al movimiento inventadas por Zenón de Eléa en Aquiles y la tortuga), las paradojas que surgen a finales del siglo XIX, posibilitan su análisis y el planteamiento respectivo de soluciones. Así, estas pueden clasificarse en Lógicas o de Conjuntos y Epistemológicas o Semánticas, aunque el límite entre las dos, muchas veces está desdibujado porque la paradoja puede referirse a los dos sujetos.

III. Paradojas lógicas

Las paradojas lógicas, para Russell[g] [5], son aquellas que tocan directamente la consistencia del sistema de lógica corriente y se refieren a nociones lógicas o matemáticas, en sí mismas como a los ordinales, cardinales, clases, relaciones, funciones, proposiciones, etc.

A. Problemática de las paradojas lógicas

Se tienen, como lógicas, las paradojas como las de Burali-Forti (1897: teoría cantoriana de los ordinales), Cantor (1899, publicada por Zermelo en 1932), Russell (1902, publicada en The Principles of Mathematics, 1903),...entre otras.

- *Burali-Forti*[h], que aparece en 1897, toca la teoría de los ordinales (en tanto que número entero que representa un buen orden). Los enteros son los ordinales finitos. El conjunto de los enteros naturales es «bien ordenado». La noción de número ordinal difiere de número cardinal cuando se pasa al infinito (ordinales infinitos distintos pueden tener el mismo cardinal). Por razones que tienen a la noción misma de ordinal, sabemos que un conjunto de ordinales es el mismo conjunto bien ordenado de manera natural. Si admitimos que el conjunto de todos los ordinales existe, se muestra que a causa de propiedades como el cerramiento se verificaría un tal conjunto; el ordinal correspondiente a ese buen orden sería estrictamente superior a aquel de sus elementos. Estamos, entonces, frente a una contradicción: el ordinal asociado debe ser estrictamente superior a él mismo. Sabemos que, un conjunto de ordinales es naturalmente bien ordenado: todos sus subconjuntos no vacíos tienen un elemento más pequeño. Sin embargo, se puede derivar la paradoja de Burali-Forti, restringida a este conjunto, verificando dos propiedades de cerramiento:

- Un conjunto de ordinales es cerrado por lo bajo, si, al mismo tiempo que él contiene un

[f] Hilbert [4] p. 100, nos explica que: [...] «la teoría de Cantor tiene en muchas partes los ataques más violentos. La reacción fue tan fuerte que las nociones más corrientes y las más fecundas, los métodos más simples y los más importantes de las Matemáticas se encuentran amenazadas, al punto que su aplicación estuvo a punto de ser prohibida. Sin duda, no faltaban defensores de las viejas ideas; pero las medidas de defensa fueron impotentes; además no se presentaba un frente único allí donde era necesario. Contra las paradojas, se preconizaban muchos remedios, [pero] para aclararlos se proponían métodos muy confusos.

Hay que decir que, la situación en la cual nos encontramos actualmente, frente a esas paradojas, no es sostenible a la larga. Al reflexionar: en las Matemáticas, en el modelo de certeza y de verdad, los métodos de definición y de razonamiento, de manera que cada uno los aprenda, los enseñe y los aplique, van a conducir al absurdo. Y dónde, entonces, se podrá encontrar la certeza y la verdad, si el pensamiento matemático nos lo rechaza?

[g] B. Russel. *Les paradoxes de la logique. Revue de métaphysique et de morale 14 (1906-1907)*. Citado por Rouilhan [1] p. 290.

[h] Cesare Burali-Forti, 1861 Arezzo – 1931 Turín, matemático italiano, asistente de Giuseppe Peano a Turín de 1894-1896 y colabora en el *Formulario de Matemáticas*. Bertrand Russell nominó la *paradoja de Burali-Forti*, la paradoja del *ordinal más grande* en Teoría de Conjuntos, en referencia a un artículo de 1897 donde el matemático italiano creyendo demostrar que dos ordinales no son comparables siempre, hace que este razonamiento lleve a la paradoja descrita por Russell.

ordinal, el contiene, entonces, todos los ordinales que le son inferiores.

- Un conjunto de ordinales es cerrado por sucesor si contiene el sucesor de cada uno de sus elementos.

Un sucesor de buen orden (E, <) es un buen orden porque se ha obtenido al agregar «al final» de E un nuevo elemento, sea e, es decir que todo elemento de E es estrictamente inferior a e. Este es estrictamente superior al buen orden (E, <). Todos los buenos ordenes sucesores de (E, <) son isomorfos, y se puede definir el sucesor de un ordinal.

De esta manera, la primera propiedad asegura que el buen orden obtenido sobre el conjunto de ordinales es superior o igual a todos sus elementos; el segundo que si verifica la primera propiedad, es estrictamente superior, porque es superior al sucesor de cada uno de sus elementos. Si el conjunto de todos los ordinales verificara estas dos propiedades de encerramiento, no podría existir y entonces nos lleva a una paradoja. Entonces la propiedad de «ser ordinal», debe poder definirse formalmente, de manera que una utilización restringida del esquema de axiomas de comprehensión conduce a una contradicción.

Rouilhan [1] (p. 23), nos presenta la paradoja así: se puede decir en base a la teoría del buen orden que, para todo ordinal a, la clase de los ordinales $\leq\alpha$, tiene por ordinal a+1. Sea Ω el ordinal de la clase de todos los ordinales. La clase de los ordinales $\leq \Omega$ tiene por ordinal Ω+1, sin embargo W no es el ordinal de la clase de todos los ordinales, lo que nos lleva a una contradicción o paradoja.

-La paradoja de Cantor (1899) o del cardinal más grande: relativa, entonces a la noción de número cardinal, es una paradoja de la teoría de conjuntos[i]. En las tres últimas cartas a Dedekind, él va a precisar las últimas ideas sobre la Teoría de Conjuntos, así, propone una nueva definición del término «conjunto» susceptible de evitar las paradojas lógico-conjuntistas, circunscribe el problema del continuo, enuncia el Teorema de Cantor ($2\alpha > \alpha$), formula la Paradoja de Cantor («Cardinal más grande») y revisa el Axioma de Selección de Zermelo. En ese sentido, busca demostrar que, «no hay conjunto cuya potencia no sea un ℵ (aleph)»y además: «un ℵ conviene como número cardinal del continuo lineal» (problema del continuo), en donde no se trata de mostrar que ℵ 1 es el cardinal del conjunto de los números reales, sino que el cardinal del conjunto es accesible por los ℵ siguientes.

Rivenc / Rouilhan [6] (p. 205-208), nos llaman la atención sobre el recorrido intelectual de Cantor y los puntos de quiebre que lo llevan a la paradoja. De manera que, antes de 1899 entre 1895-1897, Cantor ha sistematizado diferentes trabajos sobre los ordinales, cardinales y la Aritmética transfinita. En 1895, Cantor había definido la noción de conjunto[j], que pronto se muestra contradictoria y conduce a la Paradoja Burali-Forti, sobre el cardinal más grande. Por esta paradoja en 1897, Cantor restringe lo esencial de su estudio de 1897 a los ordinales enumerables. Para enfrentar esta dificultad hace la diferencia entre: pluralidades absolutamente infinitas o inconsistentes y las pluralidades consistentes o conjuntos. Quiere mostrar que ciertos «sistemas», como los ordinales y los cardinales, son pluralidades inconsistentes e inversamente, que todo conjunto tiene un ℵ (aleph) o potencia determinada como cardinal. Siendo este último el punto débil de su razonamiento. Luego, plantea que, toda pluralidad infinita consistente tiene un ℵ (aleph) como cardinal. En donde se pregunta: ¿Cómo se sabe que las pluralidades bien ordenadas a las cuales se asigna los números cardinales son realmente pluralidades consistentes?

El muestra que el problema para determinar si una pluralidad es consistente o no, no está ligado al pasaje del finito al infinito.

Al plantear, el enunciado general del Teorema de Cantor y el de la «paradoja de Cantor», considera el sistema «S de todas las clases pensables» (cada clase es la colección de los conjuntos de la misma potencia, ℵ, aleph); el trata de mostrar que

[i] En 1883 ya había demostrado que no existe el número cardinal más grande. El argumento se encuentra en una carta a David Hilbert en 1897 y en tres cartas dirigidas a Dedekind del 28 de Julio, 28 y 31 de Agosto de 1899. En 1903 fue presentada en los *Principles of Mathematics* de Bertrand Russell.

[j] Ver parágrafo 2: «Contexto Lógico de las Paradojas», de este artículo.

ésta no constituye un conjunto. Lo que evita razonar sobre la pluralidades inconsistentes, pero no de utilizar el Axioma de selección. A cada cardinala Cantor asocia un conjunto M, en donde a es la potencia. Así, él define un cardinal, como un «concepto general» y no como un conjunto, obtenido a partir de un conjunto que hace abstracción de la naturaleza de los elementos de este conjunto y su orden; no se puede tomar a como representante de la clase, se tiene entonces necesidad de escoger simultáneamente un representante en cada clase. La paradoja enuncia que la «existencia del cardinal más grande conduce a una contradicción».

En una teoría de conjuntos muy «ingenua», que considera que cualquier propiedad define un conjunto, la paradoja es una antinomia, es decir una contradicción deducida de la teoría, porque el cardinal de la clase de todos los conjuntos sería entonces el cardinal más grande, sin embargo como decíamos, lo que muestra Cantor, es que no es un conjunto. Formulado en términos modernos y en una teoría de conjuntos axiomática, que no conocía Cantor, sería: «la clase[k] de los cardinales no es un conjunto».

De manera esquemática, Cantor demuestra: Sea T el conjunto de todos los conjuntos. 2T es el conjunto de todos los conjuntos, entonces $2T \subseteq T$, en donde $M \ngtr N$; porque $2T \ngtr T$. Pero, en virtud del Teorema de Cantor: $2T > T$, existe entonces, una contradicción y por lo tanto una paradoja.

- *La paradoja de Russell de 1902*: Russell examina la forma en la que Cantor demuestra que no existe el número cardinal más grande y que al aplicar esta demostración al «número de todas las cosas que existen en el mundo» descubre la paradoja. De manera que, él considera «una clase muy particular» aquella de las «clases que no son miembros de ellas mismas» y Russell se pregunta si esta clase es miembro de ella misma o no, porque cada término de la alternativa conduce igualmente a su contrario y por lo tanto hay una contradicción.

En su demostración, el va a presentar cómo ninguna aplicación $f: u \rightarrow \beta(u)$, no puede ser suryectiva en el caso de la clase de todas las clases. Porque si para toda clase, existe una suryección, a saber $f: u \rightarrow \beta(u)$, por ejemplo, en la aplicación determinada $f(x) = x$ si x es una clase y $f(x) = \$x\%$ si no, nos lleva a una contradicción.

A nivel más sencillo, se puede explicar como «el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen ellos mismos como elemento». Así, sea S este conjunto. Supongamos que:

- S se contiene a sí mismo, pero en virtud de la definición de S, S no se contiene a sí mismo.
- Entonces por reducción al absurdo (se rechaza la hipótesis), se demuestra: S no se contiene a sí mismo.
- Pero, según la definición S se contiene a sí mismo.
- Lo cual constituye una contradicción, es decir una paradoja.

Russell, propone una versión popular a esta paradoja: «el barbero de un pueblo rasura todas personas que no se rasuran por sí mismas. Pregunta: ¿el barbero se rasura él mismo? Es una paradoja que dice falso (porque lógicamente es contradictoria).

Anotaciones

Estas paradojas son la prueba apagógica (prueba por el absurdo), de su resolución: la paradoja del Barbero es la prueba por el absurdo de la hipótesis de la existencia de un tal barbero (que no existe); en la paradoja del conjunto de Russell, es la hipótesis de la existencia de un tal conjunto, que no existe, lo mismo que el conjunto de todos los conjuntos de Cantor. Lógicamente, se da una propiedad característica de ese conjunto, una condición necesaria y suficiente para que un objeto sea un elemento del conjunto, que no es lo bastante precisa para ser comprensible. La información dada no va en correspondencia con la doxa, o evidencia que se plantea. ¿Qué falta, si se trata de un conjunto (objeto abstracto, no concreto), en el campo de la abstracción para que sea legítimo? Lo que falta, es una compresión más profunda de la noción de

k Al final del siglo XIX, no se concebía que una colección de objetos, sea otra cosa que un conjunto.

conjunto, y la determinación correlativa de un principio limitado en la abstracción para controlar su uso. Así mismo, se observa que los conjuntos presentados en estas paradojas son demasiado «grandes» como el conjunto T de todos los conjuntos en la paradoja de Cantor, lo que puede llevar al libre uso de concepciones intuitivas (base de la definición cantoriana de conjunto) que conduce a graves dificultades, como se ha visto en las paradojas expuestas [1] (p. 20).

IV. Soluciones a las paradojas lógicas

Así, la disolución de estas paradojas requiere conocer claramente las formulas regulares primitivas, a las cuales se les puede aplicar el principio de abstracción y las formulas a las que se hace excepción; un procedimiento que determine en dónde comienza, cómo y el por qué de esta manera de proceder, lo mismo que los esquemas de deducción definidos en el procedimiento. Lo que quiere decir, la problemática relativa a la naturaleza de las matemáticas, al alcance de sus métodos y particularmente a los métodos deductivos. Así, se tiene un replanteamiento del sistema axiomático existente, que vemos con las propuestas formalistas de Zermelo, Fraenkel, Peano y su principal representante David Hilbert. A nivel de ilustración, presentamos una lista de nueve Axiomas [3] (p. 197-198), presentada por Fraenkel en 1961, de manera que no se pueda derivar las paradojas conocidas:

1. Axioma de extensionalidad: dos conjuntos A y B don idénticos si contienen los mismos elementos.

2. Axioma de los subconjuntos de un conjunto dado. Para todo conjunto A dado y todo predicado P(x) define el conjunto x [$x \in A$ & P(x)] que contiene aquellos de los elementos de A que verifican que P(x) existe. Este axioma se llama también 'axioma de selección, «axioma de separación».

3. Axioma del Par. Si a y b son objetos distintos, entonces el conjunto $a, b% contiene exactamente a y b, existe.

4. Axioma de la reunión. Para todo conjunto S de conjuntos dado, el conjunto US de los elementos de S existe.

5. Axioma del Infinito. Existe al menos un conjunto infinito: el conjunto $0, 1, 2, 3, ...% de los números naturales.

6. Axioma del conjunto de las partes. Para todo conjunto dado A, el conjunto 2A cuyos elementos son todos los subconjuntos de A, existe.

7. Axioma de Selección. Para todo conjunto disjunto S de elementos no vacios dado, existe un conjunto C formado al tomar exactamente un elemento en cada uno de los elementos de S. (Se dice que S es disjunto si dos elementos distintos de S no tienen parte común).

8. Axioma de substitución o de remplazo. Se da un conjunto A y una relación funcional f definido sobre A, el conjunto contiene exactamente los objetos f(x) para $x \in A$, existe.

9. Axioma de fundación o regularidad. Todo conjunto no vacio A contiene un elemento b tal que A y b no tienen elemento común.

V. paradojas epistemológicas o semánticas

Una paradoja semántica es relativa a diversas nociones semánticas que relacionan el lenguaje con el mundo de hechos reales, es decir la noción de verdad verificacional de un enunciado o la noción de satisfacción de una formula, por una o varias entidades. Estas paradojas, dependen entonces, de hipótesis extra-lógicas, las cuales son posibles de reformular y ser corregidas; la teoría lógica en el marco donde ellas aparecen no está en juego [7] (p. 157-161).

A. Problemática de las Paradojas Semánticas

Este tipo de paradojas incluyen las de Richard, Berry, del Mentiroso,...entre otras, así:

- *Paradoja de G. W. Berry* [3](p. 196), sea la expresión: «el más pequeño número natural que no se puede decir en menos de veinticinco sílabas». Esta expresión define un cierto número natural, bien determinado n, es decir perteneciente al conjunto de números naturales no-vacío, que tiene el más pequeño elemento (en el caso presente se trata del conjunto de los números naturales que no se puede definir con menos de veinticinco sílabas). Según su definición, n no puede ser designado por una expresión donde figuren menos de veinticinco sílabas. Sin embargo, la expresión que define n tiene veinticuatro sílabas. Lo que crea una contradicción.

Estas paradojas contemporáneas y varias semejantes como la de Richard, están ligadas a la paradoja del Mentiroso que era conocida desde la antigüedad (siglo VI a. C. por Epiménedis) y que es considerada como el paradigma de las paradojas semánticas.

- *Paradoja del Mentiroso*: Paradoja expuesta en el Parágrafo 1: «Introducción», de este estudio. A la afirmación: «Todos los cretenses son mentirosos» de Epiménides, se puede admitir que Epiménides entendía por mentiroso, alguien que no dice nunca la verdad. Si suponemos que su enunciado es verdadero, entonces el contenido de su enunciado, en vista de que aquel que lo pronuncia es cretense, el enunciado es falso, es decir tenemos una contradicción; por reducción al absurdo, el enunciado no es verdad, él es falso. Lo que significa que en ciertas ocasiones puede pasar que algún cretense diga la verdad, lo que no puede ser objeto de una demostración lógica y es entonces una contradicción.

Puesto en lenguaje lógico: a la proposición «todos los cretenses son mentirosos» (p), nos preguntamos ¿cómo decidir de la valor de verdad de «p»? Si «p» es verdad, como Epiménedis es cretense y entonces mentiroso, «p» debe ser falso. Se necesitaría que «p» sea falso para poder ser verdadera, lo que es absurdo.

Así mismo, en otros términos, para determinar el valor de verdad del enunciado: «Yo miento; si es verdad que yo miento, yo digo falso cuando digo esto. Pero, si es falso que «yo miento, entonces yo digo la verdad».

Anotaciones:

Estas paradojas semánticas, se deben, en primera instancia, a la falta de claridad en el uso de las reglas de juego del lenguaje, así por ejemplo en la paradoja de Berry, se deja de lado una hipótesis tácita pero esencial que toca la serie ordenada de las definiciones. Esto indica la necesidad de distinguir las aserciones interiores de la Aritmética (que no hacen referencia a ningún sistema de anotación) y las aserciones correspondientes a un cierto sistema de anotación que posibilita la sistematización de la aritmética (metamatemática). De ahí, la importancia de formular clara y de manera precisa las explicaciones, significados y modos de utilización del Lenguaje y sus reglas de juego, lo que se llama el Metalenguaje. La falta de claridad de estos metalenguajes pueden llevar a lo que se llama: la autoreferencia o a un círculo vicioso.

Círculo vicioso[1]:

Las paradojas semánticas consideran conjuntos que parecen no poder ser completos y clausurarse sin incluir un elemento que los presupone. Así, la frase de Epiménedis (P) es una frase cretense que se ha tratado de incluir en el conjunto de los enunciados cretenses (A), conjunto que a su vez, la frase de Epiménedis presupone como dato, porque esta frase califica este conjunto globalmente como mentiroso. Así, se ve un círculo vicioso: se quiere incluir P en el conjunto A, mientras P no tiene sentido, al menos que se disponga del conjunto A como terminado y completo: P presupone A como completo y A no parece poder completarse que incluyendo P, lo que produce la paradoja [8] (p. 144).

Autoreferencia y Confusión de Lenguajes

Igualmente, estas paradojas ponen en evidencia un fenómeno de autoreferencia, en donde parece obligatorio incluir en un conjunto Q, el nombre

1 H. Poincaré (matemático francés) en la *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1905-06, p. 305, 307; 1908, p. 202, 206-207, nos explica su concepción de *Círculo Vicioso*, así: [...]«E es el conjunto de todos los números que se pueden definir por un número finito de palabras *sin introducir la noción de conjunto E en sí mismo.* Sin esta noción, la definición de E contendría un círculo vicioso; porque no se puede definir E por el conjunto E él mismo» (Citado por Rouilhan [1], p. 134).

que permite definir este conjunto, o el término, que identifica este conjunto. Un nombre, que define objetos, es espontáneamente utilizado para definirse él mismo como uno de los objetos. Esta propensión autoreferencial se engendra en la analogía que existe entre los objetos del conjunto para definir y la definición misma del conjunto; así, por ejemplo, el catálogo de los catálogos es una clase de catálogo. Pero se pierde así, lo que distingue fundamentalmente el conjunto Q (o los objetos que forman este conjunto) y el término que permite identificar este conjunto, a saber, no se tiene en cuenta la diferencia de niveles lógico-lingüísticos. Así, el uso paradójico de un término o de un enunciado descriptivo, en este sentido, entra en esa confusión de niveles.

B. Soluciones a las paradojas semánticas

Las dificultades presentadas en el desarrollo de las paradojas semánticas muestran vacíos inherentes a la teoría lógica y matemática que en su mayoría proceden de la base intuitiva presentada en la teoría cantoriana de conjuntos, entre otros. Estas dificultades van más allá de las Matemáticas y conducen a preguntarse: ¿cómo modificar la teoría y los métodos de razonamiento que habían parecido siempre convincentes, de manera que se pudiera impedir las contradicciones? La Lógica considerada como la ciencia de las inferencias válidas, define doblemente su validez: por un lado, con respecto a las reglas formales de la deducción (axiomática), que podría llamarse sintaxis y por otro lado, como proceso de transmisión de la verdad, que podría llamarse semántica. De esta manera, la resolución de las paradojas semánticas está en el centro de la problemática referida a la verdad[m] y a sus diferentes concepciones, las cuales se pueden ver en la verdad-correspondencia, la verdad-coherencia, la verdad-pragmática y la verdad- lógica [9] (p. 85-89), así:

- *Verdad-correspondencia*: en donde una proposición es verdad cuando corresponde a un objeto o realidad[n]. [10],[11],[12]
- *Verdad-coherencia*: en donde una proposición es verdad si es compatible con las otras proposiciones del sistema, es decir si estas proposiciones admiten al menos una interpretación que les satisface, en conjunto.
- *Verdad-pragmática*: en donde una proposición es verdad si corresponde a su contexto según la forma que se utiliza[o].
- *Verdad-Lógica*: una proposición es verdad si en términos de satisfacción, cumple dos condiciones: adecuación material y formal.

La búsqueda de soluciones a esta problemática, va a ocupar varios de los desarrollos de la Lógica en el siglo XX. Nos vamos a referir a dos soluciones propuestas: la de verdad-lógica propuesta por Tarski en 1931 y la de verdad-coherencia propuesta por Russell en 1908.

[m] Frege [10] (p.170-171) nos señala que, si bien «todas las ciencias tienen la verdad por objetivo, la lógica se ocupa de una manera diferente [...] a ella le corresponde conocer las leyes del ser verdadero [...] De esas leyes que regulan el ser verdadero nacen prescripciones para la opinión, el pensamiento, el juicio, el razonamiento [...] Es solamente después de haber discernido las leyes del ser verdadero que nosotros podemos decidir».

Igualmente Frege en su *Ideografía* [11] (p. 5) nos explica: «la adquisición de una verdad científica recorre normalmente varios grados de certeza. La proposición general, puede ser conjeturada a partir de un número insuficiente de casos individuales [...] o a la inversa, que sea reconocida como siendo una consecuencia de proposiciones establecidas. Es por esto que, es posible cuestionar el camino por el cual una proposición fue realizada, y la manera por la cual finalmente hay que justificarla de manera sólida. [...] esta segunda es más precisa y su respuesta es ligada a la esencia interna de la proposición considerada. La demostración la más solida es manifiestamente aquella que es puramente lógica, que [...] se funda solamente sobre las leyes sobre las cuales todo conocimiento reposa»

[n] La concepción correspondista de verdad, es propuesta por Platón en el *Sofista*, retomada por Aristóteles, en la *Metafísica*: «Decir de aquello que es que es y de aquello que no es que no es verdad»; por Tomás de Aquino que habla de *adecuación de la cosa y del intelecto*; por Locke, que considera que las palabras corresponden a las ideas, las cuales corresponden a las cosas; Russell tiene por verdad la proposición que describe un hecho que se conoce directamente; por Wittgenstein [12] del *Tractatus* en la idea de la representación como isomorfismo estructural entre una proposición y un hecho del mundo (§ 2.1 sq.). Esta concepción es criticada por Frege, diciendo que una relación de correspondencia no puede ser establecida sino entre términos de la misma naturaleza.

[o] El *Pragmatismo*, inventado por Pierce, desarrollado por James y Dewey, autoriza una nueva concepción de verdad. Peirce, anti-cartesiano, rechaza los fundacionalismos, pero se pueden admitir creencias, y el conocimiento está determinado por conocimientos anteriores. Rechaza la concepción correspondista de la verdad.

1) Método de Tarski

Alfred Tarski en su estudio: El concepto de verdad en los Lenguajes Formalizados de 1931 [13], inaugura la semántica formal, en la que uno de los objetivos era resolver la paradoja del Mentiroso. Se propone, construir una definición de la expresión 'proposición verdadera', definición que sea adecuada y formalmente correcta', así:

- La verdad materialmente adecuada responde a la convención T siguiente:
  - «p» es verdad si y solamente si p
  - Aplicada a la proposición «la nieve es blanca», la convención T se escribe: «la nieve es blanca» es verdad si y solamente si la nieve es blanca.

La verdad, en este sentido, no se aplica a objetos materiales, sino a las entidades de lenguaje; ella se regula en un Lenguaje diferente al que se utiliza por las entidades del Lenguaje, es el Metalenguaje. Un hecho u objeto no sería verdad, él es o él no es, por el contrario, la proposición que describe este hecho u objeto puede ser verdadero o falso.

- La verdad formalmente correcta, concierne el lenguaje al cual pertenecen las proposiciones susceptibles de ser verdaderas o falsas, con dos condiciones:
  - Que el lenguaje esté regulado, dando la indicación de cuándo es verdadero o falso, que es una de las funciones del Metalenguaje. En el caso, de no tener estas indicaciones, sería la base de la emergencia de paradojas.
  - Que su construcción respete las reglas de buena formación.

Con estas condiciones Tarski distingue dos niveles: el lenguaje-objeto o la lengua en la que hablamos (español, por ejemplo) y el Metalenguaje con las explicaciones y normas del lenguaje-objeto.

Definición de Verdad y Satisfacción

Tarski determina, entonces, la verdad a partir del concepto de satisfacción y desarrolla la definición inductiva de la verdad como sigue: para un lenguaje L que contiene: $\neg$ («no»), $\wedge$ («y»), $\vee$ («o») y cuantificadores (" «para todos» y $ «existe»), se tiene:

- (I) Una negación $\neg A$ es verdad si y solamente si A no es verdad.
- (Ii) Una conjunción $A \wedge B$ es verdad si y solamente si A es verdad y B es verdad.
- (Iii) Un $A \vee B$ de disyunción es verdad si y solamente si A es verdad, B es verdad, o las dos son verdad.
- (Iv) Una declaración universal «" x A (x)» es verdad si y solamente si todos los objetos x satisfacen «A (x)».
- (V) Un estado existencial «$\exists$ x A (x)» es verdad si y solamente si él es un objeto x que satisface «A (x)».

Anotaciones

De esta manera Tarski explica cómo las condiciones de verdad de las frases complejas (construidas a partir de conectores y de cuantificadores) pueden ser reducidas a condiciones de verdad de sus constituyentes, en los cuales los más simples son las proposiciones atómicas.

Tarski define la verdad[p] de las proposiciones atómicas de manera variante, es decir que no utiliza todos los términos técnicos de la semántica, como las que se expresaron, debido a la necesidad de definir los términos semánticos en términos de verdad, de manera que se podría encontrar la circularidad o la autoreferencia si se utilizara alguno de ellos en la definición de la verdad misma.

p Tarski [14] (p. 109) nos va a presentar los constituyentes fundamentales de una teoría deductiva, que deben aplicarse en la construcción de la Lógica y de las Matemáticas. El análisis detallado y la evaluación crítica de esos principios son tareas que salen de una disciplina especial llamada la *Metodología de las Ciencias o Metodología de las Matemáticas* y para las Matemáticas, el conocimiento de este método es de una importancia particular, porque sin este conocimiento es imposible entender la naturaleza de las Matemáticas, en el cual se basa el concepto de verdad.

Por otro lado, para complementar los requerimientos de la verdad formal, va a presentarnos el requerimiento de un Metalenguaje mucho más completo.

Metalenguaje más completo

Tarski (1935) [14] usa la construcción de Gödel para dar una versión formalizada de la paradoja del mentiroso. Kurt Gödel [15] (p. 70-76) había probado la incompletitud de la versión de la Aritmética de Peano por asociación de un número codificado, denotado ‘δ’, con cada frase δdel lenguaje de la Aritmética, luego construye una frase Γ la cual niega que ‘Γ’ era el código de un teorema. Si Tr(x) era una fórmula del lenguaje de la Aritmética la cual representaba el conjunto de números codificados de las frases verdaderas, tendríamos:

(T) Tr (‘δ’) $\leftrightarrow$ δ, para cada frase δ.

Pero los métodos de Gödel pueden ser usados para construir una frase τ tal que τ $\leftrightarrow\neg$Tr (‘τ’) es un teorema, con lo cual podemos decir que no hay fórmula del lenguaje de Aritmética que represente el conjunto de números codificados de frases verdaderas del lenguaje de la Aritmética. Este resultado sirve no solamente para el lenguaje de la Aritmética sino para cualquier lenguaje en el cual se incluye el lenguaje de la Aritmética, así se puede codificar el lenguaje de la aritmética dentro de cualquier lenguaje que pueda suministrar una teoría sintáctica rudimentaria. De esto, se puede decir que, si L es un lenguaje viable para describir nuestra propia sintaxis, se requiere un conjunto de frases cerradas (Tr (x), correspondientes a la sintaxis, de manera que el esquema (T) sea consistente con las leyes de la sintaxis; aquí ‘j’ es un nombre estándar de d el cual describe la frase en términos de su estructura sintáctica.

Sin embargo, cualquier teoría semántica que representa adecuadamente nuestro entendimiento intuitivo de verdad implicaría seguramente todas las (T)-frases. De lo cual, se puede concluir que no hay posibilidad, consistente con las leyes de la sintaxis, de encontrar una frase abierta de L que represente adecuadamente el conjunto de todas las verdades de L. La conclusión de Tarski es que para desarrollar una teoría satisfactoria de verdad para L, es necesario utilizar un metalenguaje mucho más rico que L [16] (p. 643).

2) Russell y la Teoría de Tipos

Bertrand Russell desde 1903, en un apéndice de los Principles of Mathematics, esboza su Teoría, luego aparecen formulaciones sucesivas en Las Paradojas de la Lógica, en 1906, luego en Mathematical Logic as based on the Theory of Types (1908), la Teoría de Tipos Lógicos (1910) y finalmente en Principia Mathematica (1910-1913) realizada con Whitehead [5]. Así, en esta última, además de presentar los cálculos lógicos, tiene el objeto de reducir las Matemáticas a la Lógica, incluyendo la Geometría. Si Cantor ya había reducido las Matemáticas a la Teoría de Conjuntos, quedaba definir lógicamente los conceptos de conjuntos y para ello Russell va a llevar el concepto matemático de conjunto a aquel lógico de clase, pero igualmente propone la Teoría de Tipos que conduce para evitar la Autoreferencia o Círculo Vicioso, de la paradoja fundamental o sea la de clases.

Teoría de Tipos

Sabemos que esta clase de paradojas semánticas, utilizan totalidades que no se pueden manejar, es necesario para ello reforzar los límites sintácticos imponiendo una condición según la cual una clase no se puede contener ella misma como elemento. Para ello, se admiten una jerarquía de niveles de significado, o tipos que se excluyen mutualmente: si un individuo puede ser miembro de una institución, tal institución no puede ser miembro sino de una asociación de instituciones, ... El resultado es una tipología donde cada clase es de un grado superior a sus elementos.

Así, por ejemplo, si distinguimos diferentes niveles, grados o tipos de lenguaje, tenemos:

1. Para hablar de los objetos extralingüísticos, es necesario un «lenguaje de objetos» de tipo cero, que puede ser un lenguaje referencial.

2. Para hablar sobre el lenguaje tipo cero, se necesita un metalenguaje, de tipo uno,...

Bajo una forma, específicamente lógica, estas distinciones invitan a discernir, por ejemplo, en la función F [f(x)] que podría simbolizar: «el vino rojo es una proposición simple»:

1. «x» que pertenece al lenguaje de objetos (x se puede remplazar por «vino»)

2. «f» que pertenece a un metalenguaje predicativo de grado uno (f se puede remplazar por «rojo»).

3. «F» que pertenece a un metalenguaje de tipo dos con predicados de predicados y funciones de funciones (F se puede remplazar por «proposición simple»).

Así mismo, al retomar la frase de Epiménedis, que concierne frases cretenses y que, ellas a su vez, conciernen hechos extralingüísticos; frases que son, entonces, verdaderas o falsas. Hay que considerar que estas frases cretenses pertenecen a un lenguaje tipo x (cero), mientras que la frase de Epiménedis pertenece al lenguaje tipo x +1. Si se trata como tal, no hay problema: sería falsa o verdadera según que el conjunto de frases de Epiménedis sea ella misma una frase cretense, pero se puede tener la tentación de considerarla como el conjunto mismo que ella describe, se designa ella misma y se cae en la paradoja de la autoreferencia, que se traduce en la indecidibilidad. Lo que muestra que, hay una confusión ilegítima de tipos sobre la base de un análisis material falso [8] (p. 145).

De esta manera, sabemos que en lógica, los errores de substituciones pueden llevar a las paradojas: no se puede equivocar de universo cuando se substituye una constante a una variable. Técnicamente, la solución de Russell permite de elucidar las confusiones y de resolver las dificultades que se les asocian. Así, si la proposición «yo miento» es paradójica, es que hay una confusión de dos tipos diferentes de proposiciones: la proposición p ella misma y la proposición que habla de p. El inconveniente mayor de la distinción de tipos es que limita el sentido de las formulas lógico-matemáticas a un dominio específico de significado dado, con lo que se destruye el significado universal de las leyes lógicas. Se puede decir que Russell fracasó en su tentativa de reducir totalmente las matemáticas a la lógica.

Anotaciones

La distinción de tipos, filosóficamente no satisface completamente. Así, la jerarquía de tipos es potencialmente ilimitada: las distinciones de niveles que opera son perfectamente aplicables en el contexto de la construcción de lenguas artificiales o en casos limitados de las paradojas. Pero este uso, no impide que se haga uso del lenguaje natural que permite hablar de las distinciones de tipos y de su jerarquía abierta, lo que es un metalenguaje, en este caso: ilimitado. No hay metalenguaje susceptible de englobar el lenguaje natural como un objeto limitado, porque es la fuente de todos los otros metalenguajes, hay entonces una reflexibilidad del lenguaje natural que es indispensable y por lo tanto legítima. Pero el deseo de una generalización del lenguaje es el sueño de quitar la reflexibilidad del lenguaje natural, que es irrealizable.

VI. Conclusiones

La presentación, análisis y soluciones de las paradojas en general y particularmente las lógicas y las semánticas, ha conducido la investigación de la axiomática (sintaxis) y de la semántica hacia diferentes horizontes que, a su vez, ha atraído igualmente a nuevas investigaciones de la Lógica. Se puede decir que, los desarrollos en Sintaxis o Axiomáticas, tuvo su gran empuje a finales del siglo XIX y a lo largo del primer semestre del XX, quedando en cierta manera cimentada la base teórica y formal de ellas. Por el contrario, la semántica sigue desarrollándose actualmente, ampliando y enriqueciendo considerablemente el campo de la Lógica. Por lo cual, vamos sintetizar las soluciones presentadas en las soluciones de las paradojas semánticas, sus autores y sus consecuencias del desarrollo de la semántica lógica, así:

- Alfred Tarski percibe las consecuencias de las paradojas y especialmente la del Mentiroso, con una claridad particular, lo que lo conduce a precisar los dos tipos de lenguajes en el que desarrollamos el análisis de la paradoja y el lenguaje teórico: si el lenguaje en que describimos el problema (lenguaje - objeto) es el mismo que el lenguaje en el cual nosotros hemos formulado nuestra teoría (el metalenguaje), este paradigma será inconsistente con las leyes rudimentarias de la sintaxis. La conclusión que Tarski nos muestra es que, sí desarrollamos satisfactoriamente la teoría de la verdad, nuestro metalenguaje podría ser esencialmente más rico potencialmente en expresión, que el lenguaje objeto y en el que se tendría una completa satisfacción de nuestras intuiciones.

- Por otro lado, el enfoque de Tarski del mentiroso es similar al de Russell y Whitehead, pero simplificado a dos lenguajes, con respecto al número de lenguajes de la teoría de tipos. Los dos enfoques hablan de una jerarquía de lenguajes. El lenguaje de base no tiene predicados semánticos, mientras el lenguaje (n+1) es derivado del enésimo lenguaje, adicionando una verdad, cuya extensión son las frases verdad del enésimo lenguaje.

- Ambas propuestas, han sido estudiadas por S. Kripke [17] (p. 690-716) el cual expresa la idea que hay enunciados «vacíos de valores de verdad» que no son ni verdaderos ni falsos como en la paradoja del Mentiroso. Él critica la forma como se asignan los niveles semánticos, como los expresados en Principia Mathematica, porque para determinar la verdad de la proposición «cada palabra que un cretense dice es falsa», se necesita analizar cada palabra que dice un cretense, lo que nos lleva a un fracaso en la asignación, de un nivel más alto que el nivel asignado, al enunciado del cretense. Por el contrario, para determinar que el enunciado de Epiménides es falso, no se necesita tener en cuenta cada palabra que un cretense dice, solamente se necesita encontrar una verdad total para un primer nivel; así, nosotros podemos declarar que el enunciado de Epiménides es falso en el segundo nivel, sin esperar a examinar una serie de enunciados irrelevantes.

  De manera que, estos razonamientos cíclicos que ocurren cuando se trata de evaluar la frase simple mentirosa, en donde si la frase es verdad, luego puede ser falsa; pero si, entonces es falsa, podría ser verdad, conllevan a instaurar el círculo vicioso. Por el contrario, para saber que un cretense dice verdad, es necesario solamente escuchar una frase que sea verdadera, con lo que se concluye que no todos los cretenses siempre mienten y entonces el enunciado de Epiménides es falso. Para enriquecer este juicio, no es necesario examinar cada cosa que un cretense dice, es suficiente encontrar una verdad cretense.

- Otra de las propuestas, que complementan la propuesta de Tarski, está dada por Whitehead y Russell para aplicar sus análisis a lenguajes naturales, de manera que se trate la palabra inglesa 'verdad' como ambigua, porque las contradicciones surgen desde un principio con la ambigüedad que existe en su significado y su manera de aplicarlo.

Vann McGee [16] (p. 643), nos llama la atención sobre la acogida de esta propuesta que ha sido también por Tyler Burge (1979), Charles Parsons (1974), Jon Barwise y Jhon Etchemendy (1987) y otros, quienes han tratado 'verdad' como un término indexado, como 'aquí' y 'ahora', cuya extensión es determinada en parte por el contexto de totalidad. Si, por ejemplo, Wittgenstein dice es verdad, el uso de 'verdad' en 'Wittgenstein dice que es verdad', entonces será contextualmente determinado para significar 'verdad'.

Referencias

[1] P. De Rouilhan, Frege les paradoxes de la représentation: Paris, PUF, 1996.

[2] G. Cantor, «Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre,» Mathematische Annalen, vol. 46, pp. 481-512, 49(1897)b reimpreso en 1932. Traducido al francés:Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis, por F. Marotte. In Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux, reeditado por Gabay, Paris, 2000. 1895.

[3] S. C. Kleene and J. Largeault, Logique mathématique: Traduction de Jean Largeault. Paris: Librairie Armand Colin, 1971.

[4] D. Hilbert, «Sur l'infini. Traduit par André Weil ; «Über das unendliche : conférence prononcée le 4 Juin 1925 à l'occasion d'un congrès des mathématiciens organisé à Munster i. w. par la Société Mathématique de Wesphalie en l'honneur de la mémoire de Weierstrass. L'original de cette traduction a paru en allemand dans les Math. Ann. t 95,» Acta mathematica, vol. 48, pp. 91-122, 1926.

[5] B. W. Russell, Alfred North, Principia Mathematica vol. 3: Cambridge, University Press, 1910-1913. 2a. ed. 1925-1927.

[6] F. Rivenc and P. D. Rouilhan, Logique et Fondements de Mathématiques (Anthologie (1850-1914).

Institut d'Histoire et Philosophie des Sciences et des Techniques. Université Paris I- Panthéon-Sorbonne. Paris: Ed. Payot, 1992.

[7] P. De Rouilhan, Russell et le cercle des paradoxes. Paris: Les Editions de Minuit, 1988.

[8] G. Hottois, «Penser la Logique: une introduction technique et théorique à la philosophie de la logique et langage ». 2ème ed. Bruxelles, De Boeck Université,,» 2002.

[9] M.-D. Popelard and D. Vernant, Eléments de logique: Seuil, 1998.

[10] G. Frege and C. Imbert, Écrits logiques et philosophiques: Ed. du Seuil, 1971.

[11] G. Frege, «Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens (Halle , Nebert 1879) traduction française : «Idéographie». Traduction, préface, notes et index par Corine Besson. Postface de J. Barnes. Paris, Librairie Philosophique J. Vrin, 1999. «Bibliothèque des Textes Philosophiques ».» English translation in [vH67], pp. 1-82, 1971.

[12] L. Wittgenstein, Tractatus logico-philosophicus trad. de G.G. Granger, Gallimard, 1993. «Tractatus Logico-Philosophicus, suivi de Investigations Philosophiques», trad. de l´allemand par Pierre Klossowski. Paris, Gallimard, 1961.: Edusp, 1994.

[13] A. Tarski, Introduction à la logique trad. française de J. Tramblay, Paris, Gauthier-Villiers, (1ère. éd. en polonais 1936). vol. 16: Gauthier-Villars, 1971.

[14] A. Tarski, Le concept de vérité dans les langages formalisés 1931 ; traduction française G.G. Granger ; Logique, sémantique, métamathématique. Paris: Colin, 1972.

[15] K. Gödel, «Sur les propositions formellement indécidables des Principia mathematica et des systèmes apparentés I,» Le théorème de Gödel, pp. 106-143, 1989.

[16] V. McGee, «Semantic Paradoxes and Theories of Truth,» in Journal of Philosophy vol. 8, R. E. o. Philosophy, Ed., ed: Ed. Edward Craig, 1998, pp. 642-648.

[17] S. A. Kripke, «Outline of a theory of truth,» The journal of philosophy, vol. 72, pp. 690-716, 1975.