ÁLGEBRAS DE BANACH Y TEORÍA ESPECTRAL

MIGUEL ÁNGEL CABRA BARRERA*

Recibido: 14 de abril de 2014 / Aceptado: 12 de junio de 2014

Resumen

Luego de hacer una exposición de las nociones básicas de álgebras de Banach, se expone un teorema de teoría espectral.

Palabras clave: álgebras de Banach, elementos regulares, elementos singulares, divisores topológicos de cero, espectro.

Abstract

In this paper, using elementary properties of the Banach algebras, we give a theorem clasical of Spectral Theory.

Key words: banach algebras, regular elements, singular elements, topological divisors of zero, spectrum.

1. Introducción

Durante las últimas décadas ha existido un gran interés en el estudio de las álgebras de Banach, una de las estructuras subyacentes del análisis funcional, en la cual relacionamos dos de los conceptos más fuertes de la matemática, los espacios de Banach y las álgebras. En este artículo estudiaremos en detalle sus definiciones y principales resultados. Al final nos daremos cuenta de la gran variedad de ideas matemáticas que entran en contacto para hacer posible esta bella teoría.

2. Preliminares

Definición 2.1. *Un* ***Álgebra*** *es un espacio vectorial, donde sus vectores pueden ser multiplicados de la siguiente forma:*

(1) $x(yz) = (xy)z$

(2) $x(y+z) = xy+xz \qquad (x+y)z = xz+yz.$

(3) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$ *para todo escalar* α.

* Universidad Nacional de Colombia.

Diremos que un ***Álgebra*** *es real o compleja, si el conjunto de escalares son los números reales o los números complejos.*

Definición 2.2. *Un* ***Álgebra Conmutativa*** *es un álgebra, en la que su estructura multiplicativa cumple:*

(4) $xy = yx$.

Definición 2.3. Un ***Álgebra con identidad*** *es un álgebra, que tiene la siguiente propiedad: Existe un elemento diferente de cero en el álgebra, notado por* 1 *y llamado elemento identidad, tal que:*

(5) $1x = x1 = x$ *para cada* x.

Ejemplo 2.4. Consideremos el espacio de funciones definidas con la suma $(f + g)x = f(x) + g(x)$ y la siguiente multiplicación, $(fg)x = f(x)g(x)$. Con estas operaciones el espacio de funciones es un álgebra con identidad, donde la identidad es la función constante definida por $1(x) = 1$ para todo x.

3. Álgebras de Banach

Definición 3.1. *Un* ***Álgebra de Banach*** *es un espacio de Banach complejo que también es un álgebra con identidad 1, y en donde la estructura multiplicativa está relacionada con la norma por:*

(1) $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$.

(2) $\|1\| = 1$.

Proposición 3.2. *La multiplicación en un Álgebra de Banach es continua.*

Demostración. Supongamos que $x_n \rightarrow x$ y $y_n \rightarrow y$, veamos que $x_n y_n \rightarrow xy$.

$\|x_n y_n - xy\| = \|x_n(y_n - y) + (x_n - x)y\| \leq \|x_n\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y\|$.

La desigualdad anterior es una consecuencia directa de la desigualdad triangular. Además como X_n es convergente entonces esta acotada, es decir, $\|x_n\| \leq C$, donde C es un número positivo, luego podemos controlar $\|y_n - y\|$ tomando por ejemplo $\varepsilon/2C$, pues y_n es convergente. Así mismo, podemos controlar $\|x_n - x\|$ (pues por hipótesis x_n es convergente), con lo que finalmente concluimos que $x_n y_n \rightarrow xy$.

Definición 3.3. *Una* ***Subálgebra Banach*** *de un Álgebra de Banach A es una subálgebra cerrada de A que contiene la unidad.*

Ejemplo 3.4. Sea B un espacio de Banach no trivial, entonces el conjunto ($\beta(B)$ de todos los operadores en B, es decir , lineales y continuos, es un álgebra de Banach. En clase mostramos que este espacio es un espacio de Banach, además es un álgebra con identidad, pues cumple también con los axiomas de espacio vectorial y el operador identidad ($I(x) = x$) es continuo y lineal. Nos falta ver la estructura multiplicativa, es decir, veamos que i) $\| TS \| \leq \| T \| \| S \|$, y, ii) $\| I \| = 1$, donde T y S son operadores en ($\beta(B)$, I el operador identidad.

$$\|TS\| = sup \{ \|(TS)(x)\| : \|x\| \leq 1 \} = sup \{ \|T(S(x))\| : \|x\| \leq 1 \}$$

$$\leq sup \{ \| T \| \|(S(x))\| : \|x\| \leq 1 \} = \| T \| sup \{ \|(S(x))\| : \|x\| \leq 1 \} = \|T\| \|S\| :$$

$$\|I \| = Sup \{ \|I(x)\| : \|x\| \leq 1 \} = Sup \{ \|x\| : \|x\| \leq 1 \} = 1:$$

Así, (β(B) es un álgebra de Banach.

Ejemplo 3.5. Si consideramos H un espacio de Hilbert, no trivial, entonces $\beta(H)$, es un álgebra de Banach.

Definición 3.6. *Una subálgebra de* $\beta(H)$, *se denomina,* ***Autoadjunta***, *si contiene el adjunto de cada operador definido en ella. Las subálgebras Banach de* ($\beta(H)$, *que son autoadjuntas se llaman,* C^* ***-álgebras.***

Ejemplo 3.7. Consideremos $\zeta(X)$, el conjunto de todas las funciones complejas continuas y acotadas en un espacio topológico X. Si X tiene solo un punto, entonces ζ(X) puede ser identificado como un álgebra de Banach, es decir, el álgebra de los números complejos.

Ejemplo 3.8. Consideremos el disco unitario cerrado $D = \{ z: \|z\| \leq 1 \}$ en el plano complejo. El subconjunto ζ(D), de todas las funciones analíticas en el interior de D, es una subálgebra que contiene la identidad. Además el teorema de Morera de análisis complejo nos permite concluir que es cerrado y por tanto una subálgebra Banach de $\zeta(D)$.

El operador topología débil en $\beta(H)$, es la topología débil generada por todas las funciones de la forma $T \to (Tx, y)$, es decir, es la topología débil con la cual estas funciones resultan continuas. De acuerdo a esto tenemos la siguiente desigualdad

$$\|(Tx,y) - (T_0x,y)\| \leq \|T-T_0\| \|x\| \|y\|,$$

luego todo conjunto cerrado en esta topología, es cerrado en el sentido usual (Topología de la norma). Esta propiedad nos motiva a dar la siguiente definición.

Definición 3.9. *Una C* - álgebra, con la propiedad anterior, es llamada un* ***Álgebra de Von Neumann.***

3.1. Elementos regulares y singulares

Definición 4.1. *Sea A un álgebra de Banach y x un elemento de A. Diremos que x es* ***Regular*** *en A, si existe un elemento y en A, tal que* $xy = 1$ y $yx = 1$, *denotaremos el conjunto de elementos regulares en A por G. Así mismo el complemento de G, lo notaremos por S, el conjuto de elementos* ***Singulares.***

De acuerdo a esta definición tenemos que G es distinto de vacío, pues 1 está en el conjunto. Además S también es no vacío, pues 0 es un elemento singular.

Proposición 4.2. *Cada elemento x para el cual* $\| x-1 \| < 1$ *es regular, y el inverso de tal elemento está dado por* $x^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n$.

Demostración. Supongamos que $\| x-1 \|$ es tal que $r \leq 1$, entonces

$$\| (1-x)^n \| \leq \| (1-x) \|^n = r^n,$$

con lo que las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n$, forman una sucesión de Cauchy en A. Como A es un álgebra de Banach, en particular es un espacio de Banach, luego esas sumas parciales convergen a un elemento de A, notemos este elemento por $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n$. Por tanto si definimos $y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n$, entonces la proposicion 3.2, nos permite inferir

$$y - xy = (1-x)y = (1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n = y - 1,$$

Luego, $xy = 1$. Así mismo,

$$y - yr = y(1-r) = (1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n = y - 1,$$

Por tanto, x es un elemento regular de A.

Teorema 4.3. *G es un conjunto abierto, y por tanto S es un conjunto cerrado.*

Demostración. Veamos que dado $x_0 \in G$, existe un número real positivo r, tal que $S_r(x_0) \subseteq G$. Sea x un elemento de A tal que $x \in S_r(x_0)$, es decir, podemos elegir $r = \frac{1}{\|(x_0)^{-1}\|}$, tal que $\| x - x_0 \| \leq \frac{1}{\|(x_0)^{-1}\|}$. ($(x_0)^{-1}$ existe, pues x es un elemento de G, es decir, es regular). Por tanto

$$\|(x_0)^{-1}x - 1\| = \|(x_0)^{-1}(x - x_0)\| \leq \|(x_0)^{-1}\|\|x - x_0\|.$$

Luego, de acuerdo a la proposición anterior, $(x_0)^{-1}x \in G$. Además como $x = x_0\,((x_0)^{-1}x)$, tenemos que $x \in G$. Así G resulta un conjunto abierto.

Teorema 4.4. *La aplicación $x \to x^{-1}$ de G en G es continua y por tanto, es un homeomorfismo de G en sí mismo.*

Demostración. Sean x y x_0 elementos de G tal que $\| x - x_0 \| \leq \frac{1}{(2\|(x_0)^{-1}\|)}$.

Como,

$$\|(x_0)^{-1}x - 1\| = \|(x_0)^{-1}(x - x_0)\| \leq \|(x_0)^{-1}\|\|x - x_0\| \leq \frac{1}{2}.$$

Entonces la proposición 4.2 nos garantiza que $(x_0)^{-1}x \in G$ y su inverso está dado por la fórmula;

$$(x)^{-1}x_0 = ((x_0)^{-1}x)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (x_0)^{-1}x)^n.$$

Por tanto,

$$\|(x)^{-1}-(x_0)^{-1}\| = \|((x)^{-1}x_0-1)(x_0)^{-1}\| \leq \|(x_0)^{-1}\|\|((x)^{-1}x_0-1)\| = \|(x_0)^{-1}\|,$$

lo cual implica

$$\begin{aligned}
\|\sum_{n=1}^{\infty} (1-(x_0)^{-1}x)^n\| &\leq \|(x_0)^{-1}\|\|\sum_{n=1}^{\infty} (1-(x_0)^{-1}x)\|^n \\
&= \|(x_0)^{-1}\|\|(1 - (x_0)^{-1}x)\|\sum_{n=1}^{\infty} (1 - (x_0)^{-1}x)\|^n \\
&= \frac{\|(x_0)^{-1}\|\|1 - (x_0)^{-1}x\|}{1 - \|1 - (x_0)^{-1}x\|} \\
&< 2\|(x_0)^{-1}\|\|1 - (x_0)^{-1}x\| \leq 2\|(x_0)^{-1}\|^2\|x - x_0\|.
\end{aligned}$$

Corolario 4.5. *Si el espacio de Banach asociado a un álgebra de Banach A es localmente conexo entonces el álgebra de Banach A es localmente conexa.*

Demostración. En clase mostramos que todo espacio de Banach es localmente conexo, luego A es localmente conexo (pues A es un álgebra ele Banach y las componentes del conjunto G son conjuntos abiertos).

Es importante resaltar, que cuando trabajamos con elementos regulares y singulares en un álgebra de Banach A, se debe tener cuidado al pasar a una subálgebra Banach A_1, pues si consideramos un elemento x regular en el álgebra de Banach A es posible que cuando pasemos a una subálgebra A_1 en este proceso x pierda su inverso y se convierta en elemento singular. En la siguiente parte del proyecto estudiaremos las condiciones que hacen que un elemento sea regular o singular en cualquier subestructura de un álgebra de Banach.

3.2. Divisores topológicos de cero

Definición 4.6. *Un elemento z en un álgebra de Banach A es llamado un* ***Divisor topológico de cero*** *si existe una sucesión* Z_n *en A tal que* $\| z_n \| = 1$ *y* $zz_n \to 0$ o $z_n z \to 0$. *Notaremos el conjunto de los divisores topológicos de cero por W.*

Teorema 4.7. *Cada elemento z en un álgebra de Banach que sea divisor topológico de cero en singular.*

Demostración. Supongamos que z es un elemento de W, veamos que z está en S. Si z es un divisor topológico de cero, entonces $\| z_n \| = 1$ y $zz_n \to 0$ o $z_n z \to 0$. Razonemos por el absurdo, supongamos que z es un elemento de G, es decir, existe z^{-1}. De acuerdo a la proposición 3.2 la multiplicación es continua, entonces podemos escribir $z^{-1}(zz_n) = zz_n \to 0$, pero esto contradice $\| z_n \| = 1$. Así mismo si ahora suponemos que $z_n z \to 0$, entonces podemos escribir $(z_n z)z^{-1} = z_n \to 0$, lo cual nuevamente contradice $\| z_n \| = 1$. Así en los dos casos obtenemos una contradicción, por tanto z es un elemento singular.

Teorema 4.8. *La frontera del conjunto S es un subconjunto de W.*

Demostración. De acuerdo a las proposiciones de las secciones anteriores, S es un conjunto cerrado. (Pues G es abierto y es el complemento de S). Por tanto la frontera de S, consiste de todos los puntos en S que son límites de sucesiones convergentes en G. Veamos entonces que si z es un elemento de S y existe una sucesión t_n en G tal que $t_n \to z$, entonces z es un elemento de W.

Como t_n esta en G, podemos escribir $t_n^{-1}\, z - 1 = t_n^{-1}(z - t_n)$ tal que t_n^{-1} no es acotada. Por otro lado

$$\| (t_n)^{-1} - 1 \| \leq 1$$

para algún n, luego $z = t_n((t_n)^{-1}z)$, podría ser regular. Como t_n^{-1} no es acotada, asumimos que $\| t_n^{-1} \|$. Si definimos $z_n = \frac{t_n^{-1}}{\|t_n^{-1}\|}$, entonces para $\| z_n \| = 1$ tenemos

$$zz_n = \frac{zt_n^{-1}}{\|t_n^{-1}\|} = \frac{1 + (z - t_n)t_n^{-1}}{\|t_n^{-1}\|} = \frac{1}{\|t_n^{-1}\|} + (z - t_n)z_n \to 0.$$

Así, existe una sucesión t_n en G tal que $t_n \to z$, entonces z es un elemento de W.

Estos dos últimos teoremas nos aseguran que los elementos topológicamente divisores de cero, son los elementos que conservan sus propiedades independiente de la subestructura de álgebra de Banach que trabajemos.

3.3. Teoría espectral

Definición 5. *Sea x un elemento de un Álgebra de Banach A, definimos el espectro de x, por el siguiente subconjunto del plano complejo*

$$\sigma(x) = \{\lambda : x - \lambda 1 \textit{ ES SINGULAR}\}$$

En la sección anterior mostramos que el conjunto de los elementos singulares es cerrado, por tanto el espectro de x es un conjunto cerrado. Así mismo consideramos el espectro de x como un subconjunto del plano complejo, en particular, tenemos que el espectro de x es un subconjunto del disco cerrado $\| \{ z : |z| \leq \| x \| \}$. En efecto, si, λ es un número complejo tal que $\lambda > \| x \|$, entonces $\| \frac{x}{\lambda} \| < 1$, luego $\|1 - (1 - \frac{x}{\lambda}) \| < 1$, por tanto $1 - \frac{x}{\lambda}$ es regular y asi $x - \lambda 1$ es regular.

Definición 6. *Sea x un elemento de un álgebra de Banach A , definimos el conjunto resolvente de x, notado por $\rho(x)$, como el complemento de $\sigma(x)$.*

Así mismo, definimos el resolvente de x, como una función con valores en A definida en $\rho(x)$ por

$$x(\lambda) = (x - \lambda 1)^{-1}.$$

Además el teorema 4.4, asegura que esta función es continua y como $x(\lambda) = \lambda^{-1} (\frac{x}{\lambda} - 1)^{-1}$ para $\lambda \neq 0$, entonces $x(\lambda) \to 0$ cuando $(\lambda) \to \infty$.

Proposición 7 (Ecuación resolvente). *Si λ y μ pertenecen a $\rho(x)$, entonces*

$$x(\lambda) - x(\mu) = (\lambda - \mu)\, x(\lambda)\, x(\mu)$$

Demostración. Si λ y μ pertenecen a $\rho(x)$, entonces

$$\begin{aligned} x(\lambda) &= x(\lambda)(x - \mu 1)x(\mu) \\ &= x(\lambda)(x - \lambda 1 + (\lambda - \mu)1)x(\mu) \\ &= (1 + (\lambda - \mu)x(\lambda))x(\mu) \\ &= x(\mu) + (\lambda - \mu)x(\lambda))x(\mu) \end{aligned}$$

Teorema 8. *El espectro de x, es no-vacío.*

Demostración. Sea f un funcional en A (es decir, un elemento del espacio dual A^*), definido por $f(\lambda) = f(x(\lambda))$. De acuerdo a la ecuación resolvente dada en la proposición anterior tenemos,

$$\frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} = f(x\,(\lambda)\, x(\mu)),$$

tomando el límite cuando $\lambda \to \mu$, obtenemos

$$\lim_{\lambda \to \mu} \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} = f(x(\mu)^2).$$

Por lo tanto $f(\lambda)$ tiene derivada en cada punto de $\rho(x)$ y

$$|f(\lambda)| \leq \|f\| \|x(\lambda)\|.$$

Razonemos por el absurdo, Supongamos que $\sigma(x)$ es vacío, y asumamos que $\rho(x)$ es el plano complejo entero. De acuerdo al teorema de Liouville tenemos que $f(\lambda) = 0$ para todo λ (Pues $f(\lambda) \to 0$ cuando $(\lambda) \to \infty$). Como f lo tomamos como un funcional arbitrario en A, entonces por corolario del terorema de Hahn-Banach tenemos que $x(\lambda) = 0$ para todo λ. Pero esto es imposible, pues ningún inverso puede ser 0 y por tanto $\sigma(x)$ no puede ser vacío.

Bibliografía

1. Dixmier J. (1957). Les algébras d, opérateurs dans z , espace hilbertien (Algébres de von Neumann). Paris: Gauthier-Villars.

2. Kakutani S, and GW Mackey. Ring and Lattice Characterizations of Complex Hilbert, Bull Amer Math Soc 1946;52:727-733.

3. Rickart CE. (1960). General Theory of Banach Algebras. Princenton, N.J.: Van Nostrand.

4. Simmons GF. Topology and Modern Analysis. McGraw - Hill. 1963, New York.