TEOREMA DE LA DIVISIÓN DE LEMNISCATA

LEONARDO SOLANILLA*, ÓSCAR PALACIO**, URIEL HERNÁNDEZ***

Recibido: 25 de junio de 2013 / Aceptado: 30 de agosto de 2013

Resumen

En este artículo demostramos el Teorema de Abel para la lemniscata sin la ayuda de la teoría de las Funciones Elípticas y sin referencia alguna a la moderna Teoría de Campos. Los ingredientes esenciales de la demostración son las funciones lemniscáticas de Gauss y algunas nociones elementales sobre factorización en el anillo de los polinomios que tienen coeficientes racionales. El procedimiento es muy poderoso. En verdad, no solo probamos que la construcción geométrica es posible, sino que indicamos las operaciones algebraicas que realizan la construcción.

Palabras y frases clave: división de la lemniscata, funciones elípticas, construcciones geométricas, Teorema de Abel, Teoría de Galois.

Abstract

Here we prove Abel's Theorem on the lemniscate from scratch. This means no reference to Elliptic Functions or Field Theory is made. Instead, we use of the elementary theory of the lemniscatic sine and some basic facts on the factorization in $\mathbb{Q}[x]$. The procedure is powerful. We do not only prove the validity of the geometric construction but also give an algebraic algorithm yielding the constructible numbers.

Keywords and phrases: Lemniscate splitting, elliptic functions, geometric constructions, Abel's Theorem on the Lemniscate, Galois Theory.

1. Introducción

La lemniscata es la curva plana dada por la ecuación cartesiana

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2).$$

En este artículo demostramos el célebre Teorema de Abel para la lemniscata:

* Doctor en Matemáticas. Profesor, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia. Correo electrónico: leonsolc@ut.edu.co

** Especialista en Matemáticas Avanzadas. Profesor, Universidad Cooperativa de Colombia, Ibagué, Colombia. Correo electrónico:ojpalacio86@gmail.com

***Profesional en Matemáticas con énfasis en Estadística. Ibagué, Colombia. Correo electrónico: uriel501@hotmail.com

Teorema 1.1 (Abel). *Si $n = 2^k p_1 p_2 \ldots P_t$, donde los P_i, $i = 1, \ldots, t$, son primos de Fermat diferentes, entonces es posible dividir la lemniscata en n partes iguales con regla y compás.*

Es inevitable comparar este resultado con el de Gauss (1801) sobre la construcción de los polígonos regulares.

Aún cuando en las demostraciones seguimos el espíritu del texto original de Abel (1827), no usamos la teoría general de las Funciones Elípticas para probar este notable resultado. En su lugar, empleamos la teoría particular de las funciones lemniscáticas de Gauss. En ello, este artículo difiere del mencionado trabajo de Abel y de la conocida versión contemporánea de Rosen (1981). La historia completa del problema desde sus albores a comienzos del siglo XVIII se puede consultar en Hernández y Palacio (2009).

En la Sección 2 presentamos los rudimentos indispensables sobre el seno y coseno lemniscáticos de Gauss. Con ayuda de la fórmula de adición del seno lemniscático para el arco doble, se prueba la primera proposición fundamental, a saber:

Teorema 1.2. *La lemniscata se puede dividir en $2^k, k \in \mathbb{Z}^+$, partes iguales con regla y compás.*

El resto del asunto es más delicado. En la Sección 3, estudiamos la forma racional de la fórmula de adición del seno lemniscático para un múltiplo impar de un arco dado. El análisis de la situación nos permite construir un polinomio cuyas raíces resuelven el problema de la división. La Sección 4 está dedicada al caso particular en el que el entero positivo impar es un primo de Fermat. En ella se prueba lo siguiente.

Teorema 1.3. *Si n es un primo de Fermat, la lemniscata se puede dividir en n partes iguales con regla y compás.*

Finalmente, un breve argumento que combina las fórmulas de adición con la Teoría de Números permite demostrar el Teorema l.l. A manera de conclusión, se bosquejan algunas reflexiones y comentarios sobre el papel de este teorema en la historia del problema de la división de la lemniscata en partes iguales.

2. Funciones lemniscáticas

En su diario matemático, Gauss (1797) anotó los resultados de su estudio sobre estas funciones. En seguida presentamos un breve resumen de su teoría, el cual sirve de fundamento a nuestra presentación.

2.1. **Seno lemniscático de Gauss.** El número

$$\frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}} \approx 1{,}3110287714605987$$

juega el papel de $\pi/2$ en la teoría de las funciones circulares. Consideremos, pues,

$$\operatorname{arcsl} : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\varpi}{2}, \frac{\varpi}{2}\right],\ x \longmapsto \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}}.$$

La integral de la derecha es la longitud de arco de la lemniscata. Como arcsl es biyectiva, definimos el seno lemniscático como la función impar de periodo 2ϖ que satisface sl = arcsl^{-1} en el intervalo $\left[-\frac{\varpi}{2}, \frac{\varpi}{2}\right]$ O sea, sl: $\mathbb{R} \to [-1,1]$ y su gráfica es similar a la del seno circular.

El seno lemniscático es diferenciable. Más aún, el teorema de inversión (o de la función inversa) del Cálculo elemental arroja $(d\mathrm{sl}/dx)(a) = \pm\,(1 - \mathrm{sl}^4(a))^{1/2}$. El coseno lemniscático es la función:

$$\mathrm{cl} : \mathbb{R} \to [-1,1],\ \mathrm{cl}(x) = \mathrm{sl}\left(\frac{\varpi}{2} - x\right).$$

La identidad pitagórica de la Trigonometría circular tiene su contraparte lemniscática en la identidad fundamental

$$\mathrm{sl}^2(x) + \mathrm{cl}^2(x) + \mathrm{sl}^2(x)\mathrm{cl}^2(x) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{sl}^2(x) = \frac{1-\mathrm{cl}^2(x)}{1+\mathrm{cl}^2(x)}.$$

La constructibilidad de un punto de la lemniscata equivale a construir el seno y el coseno lemniscático correspondiente a su arco. Así que, desde el punto de vista de las construcciones geométricas, basta obtener una de las dos funciones lemniscáticas puesto que la otra se obtiene de aquella por operaciones de campo y raíces cuadradas.

También, la fórmula de adición del seno lemniscático es

$$\mathrm{sl}(x \pm y) = \frac{\mathrm{sl}(x)\mathrm{cl}(y) \pm \mathrm{sl}(y)\mathrm{cl}(x)}{1 \mp \mathrm{sl}(x)\mathrm{sl}(y)\mathrm{cl}(x)\mathrm{cl}(y)}.$$

2.2. Bisecciones iteradas de la lemniscata. Así pues, la fórmula del seno lemiscático del arco doble es sl(2x) = $\frac{2\mathrm{sl}(x)\mathrm{cl}(x)}{1-\mathrm{sl}^2(x)\mathrm{cl}^2(x)}$. Ella nos conduce a un primer resultado sobre la construcción de las divisiones de la lemniscata.

Proposición 2.1. *Si sl(x) es construible con regla y compás, entonces* $sl\left(\frac{x}{2}\right)$ *también lo es.*

Demostración. En

$$\mathrm{sl}(x) = \frac{2\mathrm{sl}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{cl}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\mathrm{sl}^2\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{cl}^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

ponemos $y = \mathrm{sl}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{cl}\left(\frac{x}{2}\right)$ para obtener $\mathrm{sl}(x) = \frac{2y}{1-y^2}$. De este modo, sl($x$) - y^2sl(x) - 2y = 0 y la fórmula cuadrática arroja que

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\mathrm{sl}^2(x)}}{\mathrm{sl}(x)}$$

es contruible con regla y compás. Ahora bien, la identidad fundamental produce

$$y = \pm\mathrm{sl}\left(\frac{x}{2}\right)\sqrt{\frac{1-\mathrm{sl}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\mathrm{sl}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}.$$

En consecuencia,

$$\mathrm{sl}^4\left(\frac{x}{2}\right) - (1-y^2)\mathrm{sl}^2\left(\frac{x}{2}\right) + y^2 = 0.$$

De nuevo, por la forma de la solución a la ecuación cuadrática, sl^2 (x/2) y sl (x/2) son construibles con regla y compás.

Repitiendo el proceso un número finito de veces a partir de la totalidad de la curva, obtenemos el Teorema 1.2.

3. Estructura de sl(nx), n impar

Es fácil probar que

$$\mathrm{sl}(3x) = \mathrm{sl}(2x + x) = \mathrm{sl}(x) \times \frac{3 - 6\mathrm{sl}^4(x) - \mathrm{sl}^8(x)}{1 + 6\mathrm{sl}^4(x) - 3\mathrm{sl}^8(x)}.$$

En general, este hecho se generaliza con ayuda del principio de inducción y la fórmula de adición del seno lemniscático. Ciertamente, no es difícil probar que

Proposición 3.1. *Si $n \in \mathbb{Z}^+$ es impar, entonces*

$$sl(nx) = sl(x) \times \psi\big(sl^2(x)\big),$$

donde ψ es una función racional con coeficientes enteros.

Escribamos ahora

$$\psi(\mathrm{sl}^2(x)) = \frac{p(\mathrm{sl}(x))}{q(\mathrm{sl}(x))},$$

para ciertos polinomios p, q con coeficientes enteros que no tienen factores irreducibles comunes y por tanto, no tienen ceros comunes. Resulta que los ceros de p son precisamente aquellos que necesitamos para la división de la lemniscata en n (impar) partes.

Proposición 3.2. *Si $n = 2k + 1 > 3$ es un entero impar, p es un polinomio de grado $n - 1 = 2k$ con ceros distintos no repetidos*

$$sl\Big(\frac{m}{n}\varpi\Big),$$

donde m toma los valores enteros distintos de cero entre $-k$ y k. Con esto, quedan determinados los ceros distintos de cero de $sl(nx)$ en el intervalo $[-\varpi/2, \varpi/2]$.

Demostración. Si $x = \varpi/n$, entonces $\mathrm{sl}(nx) = \mathrm{sl}(\varpi) = 0$ y así, $\mathrm{sl}(\varpi/n)$ es un cero distinto de cero de p. Con el fin de encontrar todos los ceros de p, observemos que si $p(\mathrm{sl}(x)) = 0$, $\mathrm{sl}(nx) = 0$. Por tanto, la periodicidad del seno implica que $nx = m\varpi$ y, de este modo, $x = \frac{m}{n}\varpi, m \in \mathbb{Z}$. Afirmamos que los ceros de p en $[-\varpi/2, \varpi/2]$ son

$$\mathrm{sl}\Big(\frac{m}{n}\varpi\Big),\ m \in [-k, k] - \{0\}.$$

Veamos que todos ellos son distintos. Ciertamente, si sl $(m\varpi/n)$ = $\mathrm{sl}(m'\varpi/n)$, entonces $(m-m')\ \varpi = 2\varpi jn,$ para cierto entero j. Se sigue que

$$\frac{m - m'}{2n} = j,$$

lo cual es contradictorio con el rango de valores posibles de m, m'. De este modo, p tiene n - 1 ceros diferentes. Hace falta ver que dichos ceros no están repetidos. Al derivar sl(nx)q(sl(x)) = sl(x)p(sl(x)) con respecto a y = sl(x),

$$\frac{d}{dy}\mathrm{sl}(nx) \times q(\mathrm{sl}(x)) + \mathrm{sl}(nx)\frac{dq}{dy} = p(\mathrm{sl}(x)) + \mathrm{sl}(x)\frac{dp}{dy}.$$

Si suponemos que p tiene un cero repetido sl(x), su derivada también se anula en dicho cero y la expresión anterior produce q(sl(x)) = 0. Esto no es posible porque hemos supuesto que p y q no tienen ceros comunes.

Corolario 3.1. *La sustitución $r = sl^2(x)$ en p produce un polinomio con coeficientes enteros de grado* $k = \frac{n-1}{2}$ *en r cuyos ceros distintos y no repetidos son*

$$sl^2\left(\frac{m}{n}\varpi\right) \in [0, \varpi/2]\,,\ 1 \leq m \leq k.$$

4. Primos de Fermat

Limitémonos al caso en que n es un primo de la forma $2^{2u}+ 1$, o sea, un primo de Fermat. Partimos, pues, del polinomio

$$c_0 + c_1 r + \cdots + c_k r^k,\ \ c_0, c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{Z},$$

$k = (n - 1)/2 = 2^{2u}-1$, cuyos ceros son

$$\mathrm{sl}^2\left(m\frac{\varpi}{n}\right),\ 1 \leq m \leq 2^{2^u-1}.$$

Denotemos por α a una raíz primitiva módulo n, es decir, α es un elemento del campo $\mathbb{Z}_n$ tal que n es el menor entero no negativo que produce $\alpha^{n-1} = 1$ (en $\mathbb{Z}_n$). Ahora bien, el grupo de unidades

$\{1, 2, \ldots, k, \ldots, n - 1 = -1\} = \{\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^k = -1, \ldots, \alpha^{n-1} = 1\}$

contiene el subgrupo {1, -1} y el cociente está formado por las clases

$$|m| = \{m, -m\},\ 1 \leq m \leq k.$$

De este modo, $|\alpha^{k+m}| = |\alpha^m|$. Todo se reduce a considerar la construcción geométrica de los elementos permutados

$$\mathrm{sl}^2\Big(|\alpha^m|\frac{\varpi}{n}\Big),\ 0 \leq m \leq k-1 = 2^{2^u-1}-1.$$

Construyamos enseguida

$$\psi_\theta\Big(\frac{\varpi}{n}\Big) = \sum_{m=0}^{k-1} \theta^m \mathrm{sl}^2\Big(|\alpha^m|\frac{\varpi}{n}\Big),$$

donde $\theta \in \mathbb{C}$ es una raíz *k-ésima* cualquiera de la unidad, es decir, $\theta^k = 1$. Notemos que ψ es una función racional de $\mathrm{sl}^2\left(\frac{\varpi}{n}\right)$, digamos,

$$\psi_\theta\Big(\frac{\varpi}{n}\Big) = \chi_\theta\Big(\mathrm{sl}^2\Big(\frac{\varpi}{n}\Big)\Big).$$

Para $\mu \in \{0, 1, \dots, k-1\}$,

$$\begin{aligned}\psi_\theta\Big(|\alpha^\mu|\frac{\varpi}{n}\Big) &= \sum_{m=0}^{k-1} \theta^m \mathrm{sl}^2\Big(|\alpha^{m+\mu}|\frac{\varpi}{n}\Big)\\ &= \theta^{-\mu}\sum_{m=0}^{k-1} \theta^{m+\mu} \mathrm{sl}^2\Big(|\alpha^{m+\mu}|\frac{\varpi}{n}\Big) = \theta^{-\mu}\psi_\theta\Big(\frac{\varpi}{n}\Big).\end{aligned}$$

Entonces, elevando a la k,

$$\psi_\theta\Big(\frac{\varpi}{n}\Big)^k = \chi_\theta\Big(\mathrm{sl}^2\Big(|\alpha^\mu|\frac{\varpi}{n}\Big)\Big)^k.$$

Sumando para los valores posibles de μ,

$$v_\theta := \psi_\theta\Big(\frac{\varpi}{n}\Big)^k = \frac{1}{k}\ \sum_{\mu=0}^{k-1} \chi_\theta\Big(\mathrm{sl}^2\Big(|\alpha^\mu|\frac{\varpi}{n}\Big)\Big)^k.$$

Esta expresión es una función racional y simétrica de los ceros del polinomio; así, se puede reescribir a partir de sus coeficientes c_0, c_1, ..., c_m

mediante operaciones de campo. Como $k = 2^{2^u-1}$, $\psi_\theta(\varpi/n) = \sqrt[k]{v_\theta}$ se obtiene a partir de υ_θ mediante raíces cuadradas sucesivas. En breve, $\psi_\theta(\varpi/n)$ es construible.

Si $\theta = \cos(\frac{2\pi}{k}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{k})$, las raíces *k*-ésimas de la unidad son θ^m, $m = 0, 1, \ldots, k - 1$. Por la forma de *k*, todas ellas son construibles con regla y compás en virtud del teorema de Gauss sobre la construcción de los polígonos regulares. Si permitimos que θ tome sus *k* valores posibles, se obtiene el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \psi_1\left(\frac{\varpi}{n}\right) \\ \psi_\theta\left(\frac{\varpi}{n}\right) \\ \psi_{\theta^2}\left(\frac{\varpi}{n}\right) \\ \vdots \\ \psi_{\theta^{k-1}}\left(\frac{\varpi}{n}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \theta & \theta^2 & \ldots & \theta^{-1} \\ 1 & \theta^2 & \theta^4 & \ldots & \theta^{-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \theta^{-1} & \theta^{-2} & \ldots & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{sl}^2\left(\frac{\varpi}{n}\right) \\ \mathrm{sl}^2\left(|\alpha|\frac{\varpi}{n}\right) \\ \mathrm{sl}^2\left(|\alpha^2|\frac{\varpi}{n}\right) \\ \vdots \\ \mathrm{sl}^2\left(|\alpha^{k-1}|\frac{\varpi}{n}\right) \end{pmatrix}$$

En particular, la primera ecuación de este sistema, correspondiente a θ = 1, produce la suma de las raíces

$$\psi_1\left(\frac{\varpi}{n}\right) = -c_{m-1} = \sum_{m=0}^{k-1} \mathrm{sl}^2\left(|\alpha^m|\frac{\varpi}{n}\right).$$

Por fortuna, la matriz del sistema no es singular. Es más, su inversa es

$$\frac{1}{k} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \theta^{-1} & \theta^{-2} & \ldots & \theta \\ 1 & \theta^{-2} & \theta^{-4} & \ldots & \theta^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \theta & \theta^2 & \ldots & \theta^{-1} \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, las raíces de nuestro polinomio *p* son construibles. Esto demuestra el Teorema 1.3.

Supongamos para terminar que n_1 es una potencia de dos o un primo de Fermat y que n_2 es un primo de Fermat, distinto a n_1 en el caso de que este lo sea. Por lo anterior junto con la fórmula de adición, los números

$$\mathrm{sl}\left(k_1\frac{\varpi}{n_1}\right) \text{ y } \mathrm{sl}\left(k_2\frac{\varpi}{n_2}\right)$$

son construibles para enteros cualesquiera k_1, k_2. Luego, por la fórmula de adición (de nuevo)

$$\mathrm{sl}\Big(k_1\frac{\varpi}{n_1}+k_2\frac{\varpi}{n_2}\Big)=\mathrm{sl}\Big(\frac{k_1n_2+k_2n_1}{n_1n_2}\ \varpi\Big)$$

también es construible. Ya que n_1 y n_2 son primos relativos, existen enteros k_1, k_2 tales que $k_1n_2 + k_2n_1 = 1$. Repitiendo este argumento las veces que sea necesario, se logra la demostración del Teorema 1.1.

5. A modo de conclusión

El Teorema de Abel señala el momento histórico de solución del problema de dividir la lemniscata en partes iguales con regla y compás. El problema había tenido un inicio prometedor a comienzos del siglo XVIII. Sin embargo, el método analítico usado para la división en dos, tres y cinco partes se hacía muy difícil para enteros mayores. Siguiendo las enseñanzas de Gauss, Abel pudo resolver el problema por un método que, hoy por hoy, puede considerarse algebraico. El resultado también tiende un puente entre el pasado y el futuro del problema. Entre otros detalles interesantes, señalemos aquí que los polinomios palindrómicos, que los grandes analistas del siglo XVIII encontraban al dividir la curva, se explican con gran claridad en el marco del estudio abeliano de sl(nx), tal como se trata más arriba. De otro lado, Abel también sentó las bases sólidas que llevaron después a probar el recíproco de su teorema, un resultado interesantísimo que queda fuera del alcance de este artículo introductorio.

Bibliografía

1. ABEL, N. H. Recherches sur les fonctions elliptiques. Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgeben von Crelle, Bd. 2, 3, Berlin, 1827-1828. Reimpreso en Œuvres complètes (1992), Tome 1, deuxième édition, Sceaux, Éditions Jacques Gabay: 263-388. Reimpresión autorizada de Œuvres complètes de Niels Hendrik Abel (1881), por Ludwig Sylow y Sophus Lie, Grøndahl & Søn, Christiania (Noruega), 1827.

2. GAUSS, C. F. *Lemniscatische Functionen II. dargestellt durch undendliche Producte un durch trigonometrische Reihen (De curva lemniscata)*. Aparecido en Werke (1866), Dritter Band, Herausgeben von der Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen: 413-432, 1797.

3. GAUSS, C. F. Disquisitiones Arithmeticae. Lipsiae, In commissis apud Gerh. Fleischer. Reimpreso en Werke (1863), erster Band, Göttingen, Herausgeben von

der Königliche Gesellschaft für Wissenschaften. Traducción inglesa (1986) de CLARKE, A. A., New York, Springer Verlag. Traducción española (1995) de BARRANTES, H., JOSEPHY, M. y RUIZ, A. Bogotá, Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1801.

4. HERNÁNDEZ, U. y PALACIO, Oscar J. *División de la lemniscata: geometría, análisis, álgebra*. Ibagué, Colombia. Trabajo de Grado, Programa de Matemáticas con énfasis en Estadística, Facultad de Ciencias, Universidad del Tolima, 2009.

5. ROSEN, M. Abel's Theorem on the Lemniscate. The American Mathematical Monthly, Vol. 88, Jun.-Jul., No. 6: 387-395, 1981.