PENSAR LAS MATEMÁTICAS

GEOMETRÍA BÁSICA:
Reflexiones Epistemológicas, Históricas y Filosóficas

VOLÚMEN I

Magdalena Pradilla Rueda,
Isaías David Marín Gaviria,
John Edison Castaño

Corporacion Universitaria Republicana
Facultad de Ciencias Básicas - Programa de Matemáticas
Centro de Investigaciones

Facultad de Ciencias Básicas. Programa de Matemáticas
Centro de Investigaciones

Autores
Magdalena Pradilla Rueda,
Isaías David Marín Gaviria,
John Edison Castaño

Pensar Las Matemáticas
Geometría Básica:
Reflexiones Epistemológicas, Históricas y Filosóficas
Volúmen I

ISBN: 978-958-5447-19-6

Edición:
Corporación Universitaria Republicana
Cra. 7 No. 19-38 • PBX: 286 23 84 • Fax: 342 27 71

Armada digital:
Grafiweb, impresores, publicistas
Correo electrónico: grafiwebgerencia@gmail.com
Teléfonos: 6945017 - 3162311978
Bogotá, D. C., Colombia, 2015

MAGDALENA PRADILLA RUEDA

Doctor en Informática y Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales. Universidad de Grenoble. Tesis: «Búsqueda de descriptores con indexación automática. Doctor en Filosofía, Universidad Paris I Panthеón - Sorbonne. Tesis: «Hacia una Epistemología de la Teoría Informática». Actualmente investigadora - docente del Programa de Matemáticas de la Corporación Universitaria Republicana.

ISAÍAS DAVID MARÍN GAVIRIA

Matemático, Universidad Nacional de Manizales. Maestría en Ciencias - Matemáticas de la Universidad Nacional. Docente investigador de la Corporación Universitaria Republicana.

JOHN EDISON CASTAÑO

Matemático, Universidad Nacional de Manizales. Cursa Maestría en Pedagogía de las Matemáticas con la Universidad Pedagogígica de Colombia. Docente investigador de la Corporación Universitaria Republicana.

ÍNDICE

PRÓLOGO

El presente Volumen 1 de la obra titulada «Pensar las Matemáticas», referido a la *Geometría Básica*, señala tanto los elementos de base para la comprensión inicial de este saber matemático, como su complejidad y amplitud adquiridas en su desarrollo, durante las tres primeras etapas de su evolución: Clásica, Proyectiva y Analítica. En este sentido, se muestran los objetos geométricos en su unidad, dentro de su contexto histórico, presentando los puntos de importantes que hacen posible su evolución epistemológica y las preguntas filosóficas que ésta conlleva.

Estas reflexiones cubren la necesidad que tiene la evolución de una ciencia, de presentar el campo de desarrollo de sus fuentes, de su sentido y de su autenticidad, de manera que, una ciencia no constituye un mundo aparte de éstos, sino un todo con el movimiento de las ideas que la han impulsado (LOI, Maurice, 1982, p.8).

Igualmente, las reflexiones filosóficas que muchas veces están al origen de una nueva teoría, adquieren su importancia porque son ellas las que marcan y harían posible esos descubrimientos. Así, por ejemplo, el estudio de los griegos presenta cómo la demostración matemática era una herramienta irremplazable del pensamiento e iba de par con el espíritu lógico de ellos, con su retórica y su arte, de manera que su pensamiento matemático tiene un estilo correspondiente a esta cultura, historia y filosofía, que ayudaron a la adquisición de su razonamiento.

Este estudio es el resultado del proyecto de investigación «Desarrollo de Didácticas sobre Matemáticas Fundamentales», correspondiente a la línea de Investigación *Pedagogía de las Matemáticas* del Grupo de Investigación de Matemáticas y Ciencias de Información. El proyecto como tal, se propone nivelar y proporcionar un conocimiento adicional a los estudiantes de los primeros semestres de Matemáticas, Ingenierías y demás carreras que requieran el conocimiento de las Matemáticas. Nivelación que responde a las falencias inherentes presentadas en el Sistema Educativo en Colombia, particularmente en el campo de la Matemática, evidenciadas en las pruebas nacionales: Saber 11 e Internacionales: Pisa.

Como productos de la investigación se prevé la definición, conceptualización y desarrollo de ayudas didácticas representadas prioritariamente en la obra .general "Pensar las Matemáticas", la cual está estructurada según rama de la Matemática, organizada por volúmenes tales como: Lógica, Geometría, etc. Estos volúmenes recogen las problemáticas y contenidos específicos de cada una de estas ramas, soportadas por los contextos históricos, epistemológicos y filosóficos, lo mismo que la parte técnica y demostrativa basadas en el simbolismo y grafismo matemático requerido, para la comprensión de los estudiantes de primeros años de Matemáticas e Ingeniería.

Los agradecimientos van para los profesores de la Université de Paris 1, Mme. C. Chauvire y del Institut d´Histoire et de Philosophie des Sciences et des Techniques de Paris 1, Philippe de Rouilhan, lo mismo que al Padre Álvaro Duque, profesor de Matemáticas de la Universidad Javeriana, por sus grandes aportes a este estudio. Así mismo, los agradecimientos al Centro de Investigación de la Corporación Universitaria Republicana, a sus directivas y los diferentes investigadores que hicieron posible la realización de este primer volumen.

1. INTRODUCCIÓN

Casi todas nuestras acciones simples o combinadas sabiamente, son aplicaciones de nociones geométricas, y la necesidad geométrica es esa misma a la cual estamos sometidos, de hecho, como criaturas encerradas en el espacio y el tiempo. (Simone Weil, *L'enraciment*, 1949)[1]

El término *geometría* se deriva del griego *γεωμέτρης* (*geômetrês*) que significa «geómetra» viene de *γῆω* (gêo) («tierra») y *μέτρον* (*métron*) «medida», que es «la ciencia de la medida de un terreno o espacio».

Esta ciencia griega, durante mucho tiempo, estuvo unida a la medición, a través de la observación y el cálculo, de los elementos y fenómenos de la atmósfera o astronomía o de fenómenos del universo en general, es decir que la génesis de esta Geometría corresponde a la de una ciencia experimental. En un nivel elemental, se realizaron el cálculo de las fases de la luna, del sol y de sus distancias respectivas con relación a la tierra haciendo referencia al teorema de Thales[2]. En los primeros modelos del sistema solar, a cada planeta se le asociaba una figura geométrica que se refería a un sólido platónico (tetraedro, pentaedro, cubo,...), luego con las observaciones astronómicas de Kepler (Alemania, 1571-1630),

1 Citada por André Warusfel en *Les nombres et leurs mystères*, 1961, p. 85.

2 El Teorema de Thales o el Teorema de la Intersección afirma que, "en un plano, una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, secciona este último en un triángulo semejante".

confirmadas por los trabajos de Newton (Inglaterra, 1642-1727), se prueba que los planetas siguen una órbita geométrica que es la *elíptica*, donde el sol constituye uno de los elementos. De esta manera, estas consideraciones de naturaleza geométrica aseguran la descripción de sus trayectorias en Mecánica clásica.

Los avances en Geometría en el siglo XIX encuentran eco en la Física, en donde una geometría como la *riemanniana* (Riemann, Alemán, 1826-1866), motivada por las preguntas de Gauss (alemán, 1777-1855) sobre la cartografía de la tierra, da cuenta en particular de la Geometría de Superficies en el espacio. Una de sus ampliaciones, la Geometría *lorentziana* (Hendrik Antoon Lorentz, Países Bajos, 1853-1928) provee el formalismo ideal para formular las leyes de la relatividad. Igualmente, la Geometría Diferencial encuentra nuevos desarrollos en la Física post-newtoniana con la teoría de cuerdas o de membranas.

En este sentido y con el correr de los siglos, la Geometría ha estado ligada a la experiencia del mundo fenomenológico, vemos cómo ella actualmente interviene, por ejemplo, en Ingeniería en el estudio de la estabilidad de un sistema mecánico, pero se aplica también en las concepciones del diseño industrial, muestra los cortes o proyecciones de un objeto tridimensional, e igualmente desarrolla el cálculo de sus longitudes y ángulos. Recientemente, la relación de la Geometría con la Informática permitió la llegada de las formaciones o aplicaciones geométricas asistidas por computador y de la Infografía.

Por otro lado, los desarrollos de Trigonometría Euclidiana inciden en la Óptica para tratar, por ejemplo, de la difracción de la luz; estos se encuentran también en el origen del desarrollo de la navegación: navegación marítima, cartografía y navegación aérea (pilotaje por instrumentos a partir de señales).

De esta manera, se ve cómo la Geometría de los griegos, ha sido un saber que es aplicativo y se vuelve indispensable en el diario vivir de la ciencia, su desarrollo y experimentaciones, lo mismo que en el devenir industrial y empresarial.

Una pregunta surge: ¿cómo se desarrolla su enseñanza y cómo se recibe esta formación? Es un hecho que la Geometría ha ocupado un lugar privilegiado en la enseñanza de las Matemáticas. Numerosos estudios pedagógicos prueban su interés: ella permite a los alumnos desarrollar una reflexión sobre los problemas, como la visualización de las figuras del plano y del espacio, para la redacción de las demostraciones o la deducción de resultados de las hipótesis enunciadas. Pero, más aún, el razonamiento geométrico es mucho más rico que la simple deducción formal, porque se apoya sobre la intuición nacida de la observación de las figuras.

En los años 1960, la enseñanza de las Matemáticas insistía sobre la aplicación de los problemas que presenta la Geometría en la vida práctica, por ejemplo, el Teorema de Pitágoras, ilustrado por la regla del 3, 4, 5, es utilizado en carpintería. Así mismo, la utilización de figuras geométricas en la enseñanza de otras materias, permite facilitar la comprensión de los razonamientos expuestos.

No obstante la reforma de la Matemática moderna, nacida en los Estados Unidos y adaptada en Europa y Latinoamérica, condujo a una reducción considerable de los conocimientos enseñados en Geometría para introducir áreas más abstractas como el Álgebra Lineal, entre otras; áreas que pretendían asumir los estudios geométricos. En numerosos países, esta reforma se ha criticado como uno de los factores responsables de los fracasos escolares en Matemáticas, por la falta de una verdadera reflexión didáctica, en particular de la Geometría, por su carácter experimental; de manera que una enseñanza y práctica de la Geometría Vectorial, por ejemplo, prepara al alumno para una mejor asimilación de las nociones formales del espacio vectorial, de la forma bilineal, etc., y en general de las Matemáticas, de la Física, Mecánica, Informática, Arquitectura, etc.

Con el fin de retomar los estudios geométricos y su lugar en la enseñanza de las Matemáticas y sus desarrollos, se presenta este estudio de *Geometría Básica*, el cual se estructuró según las tres primeras etapas históricas de su desarrollo. A nivel general esta evolución es la siguiente:

- Geometría Clásica, 2.500 a.C. – s. XIII: relativa a sus orígenes, tanto de las civilizaciones babilónicas, egipcias, griegas, árabes y alejandrinas. En este sentido, son los desarrollos de Euclides y Apolonio que marcan el núcleo de ésta Geometría. Aquí, «la Geometría es el estudio de las formas y superficies de las figuras»; «es el lugar donde se aprende a conocer el espacio».

- Geometría Proyectiva, s. XV-XVII (Desargues-Pascal): Artistas italianos (siglo XV), representan en un plano figuras de la naturaleza y el espacio, a partir de un *punto de vista* que constituye el ojo. Las reglas geométricas (*perspectiva*) se convierten en la esencia misma de la naturaleza, porque permiten traducir la similitud de lo representado con lo real, la pregunta principal es: ¿cuáles son las propiedades geométricas comunes a estos dos elementos: lo representado y lo real? Desargues (s. XVII), relaciona la teoría de las cónicas, la perspectiva de los pintores, y las formulas en términos matemáticos concisos, para mejorar las técnicas de los artistas, ingenieros y talladores de piedra. Pascal (s. XVII) con su *teorema de Pascal* sobre el *hexagrama místico*, esquematiza una demostración por *perspectiva,* extendida a todas las cónicas.

- Geometría Analítica, s. XVII (Fermat - Descartes): reposa sobre el principio de base que toda recta se asimila a una representación (una imagen) sobre el conjunto de los reales (o más general, de un cuerpo conmutativo). El espacio se descompone en sub-espacios y un punto es definido por coordenadas. Por lo cual, cada figura se determina por un sistema de ecuaciones, en donde una curva es la representación de una función; se ve que este enfoque algebraico lineal, basado en la noción de espacio vectorial, es un puente entre la Geometría y el Análisis.

- Geometría No-euclidiana, s. XVIII-XIX: corresponde a las diferentes investigaciones y tentativas de aclarar el quinto postulado de los *Elementos* de Euclides, que se refiere al concepto de *infinito*, considerado *no-evidente* por los matemáticos. En esta Geometría no-euclidiana se subentiende un espacio curvo, pero existe también en espacios a tres dimensiones. Desde los árabes y persas se estudian los lazos entre este postulado y la suma de los ángulos cuadriláteros y de los triángulos. Se presentan tentativas de demostración por el *absurdo* (Wallis, Saccheri). Lambert plantea la *Geometría Hiperbólica y la Elíptica*. Así mismo, se distinguen las geometrías de *curvatura negativa* con Gauss, Lobatchevski y Bolyai, o *la Geometría de Curvatura positiva* con Riemann.

- Geometría Contemporánea, s. XIX-XXI: Los resultados del siglo XIX conducen a revaluar las nociones de forma y espacio, dejando de lado la rigidez de las distancias euclidianas. Se ve la posibilidad de deformar continuamente una superficie sin preservar la métrica existente, por ejemplo, deformar una esfera en un elipsoide. Estudiar estas deformaciones condujo al surgimiento de la *topología,* sus objetos de estudio son los espacios topológicos, cuya noción de proximidad y continuidad se define por conjuntos con la propiedad de vecindad.

2. Geometría clásica: Orígenes de la geometría

2.1. Babilonia y Egipto

Las primeras civilizaciones antiguas que dejaron fuentes para analizar sus conocimientos geométricos y matemáticos son las civilizaciones babilónicas y egipcias.

2.1.1 Babilonios

Los babilonios comprenden una serie de pueblos que vivían en la Mesopotamia entre el 5.000 a.C. y el principio de nuestra era. Babilonia era el principal centro cultural[3]. En ese sentido el origen de la Geometría está ligado directamente a las exigencias de la vida práctica: fabricación y ornamentación de objetos, construcción de habitaciones, graneros, monumentos funerarios y cálculo de las superficies de los campos, que se observan en las tabletas de los babilonios y en los papiros egipcios.

---

3 Las investigaciones arqueológicas que comenzaron en el siglo XIX, permitieron encontrar varias tabletas de barro grabadas con escritura cuneiforme, en buen estado. Más de 300 de entre ellas conciernen las Matemáticas y datan tanto de la primera dinastía babilónica (1800-1500 a. C.) marcada por el reino de Hammurabi, como del período llamado helenístico, entre 600 a.C. y 300 d.C. de la dinastía caldea (Dahan-Dalmedico, A. – Peiffer, J. , 1988, p.12).

Si bien las Matemáticas de los babilonios son algebraicas, el origen de los problemas presentados por los escribas es geométrico, como el cálculo de superficies y de volúmenes muy simples. Estos problemas son frecuentemente acompañados de diseños, poco precisos, que ilustran el lado rudimentario de la *Geometría Babilónica*.

Esta no cuenta todavía con la geometría del círculo, pero conoce una regla indicando su área: si p es el perímetro del círculo, su área A se calcula por $A=p^2/12$, lo que da un valor de 3 para π. Otras fuentes hacen pensar que los babilonios usan un valor de $3\frac{1}{8}$ para π. Además, ellos conocen las relaciones de similitud en los triángulos rectángulos y utilizaron una relación aproximada a la del *Teorema de Pitágoras* entre los lados del triángulo (*El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma del cuadrado de los dos otros lados*).

Anotaciones

En la época del Rey Salomón, 900 a.C., la *Biblia* dice que, su obra consistió en el Templo mandado construir por David, cuyas indicaciones para su realización eran muy precisas. Ellos conocían también, la medida de la circunferencia, que tiene una relación de 3, lo que afirma que π vale 3, es decir que la longitud de la circunferencia es 3 veces su diámetro.

2.1.2 Egipcios

En cuanto a la civilización egipcia[4], Heródoto, historiador griego (484 a.C. - 420 a.C.) hace remontar el origen de la Geometría Egipcia

4 La civilización egipcia, formada de dos reinos del Alto y el Bajo Egipto, su periodo más brillante es aquel de la III dinastía de los Faraones (hacia 2500 a.C.), en el que se construyeron las pirámides, hasta la conquista de Alejandro el Grande en 332 a.C. Ellos utilizan dos sistemas de escritura, el uno *jeroglífico* usado sobre los monumentos y piedras en las tumbas, es pictórico, cada símbolo representa un objeto. El otro es *hierático* emplea símbolos convencionales como simplificaciones de los jeroglíficos. Este último, más adaptado a la escritura manual, se utiliza sobre papiros que es la fuente

a la necesidad, después de cada inundación del Nilo, de redistribuir equitativamente los campos a sus propietarios, lo que confirma su origen pragmático. Como aquella de los babilonios, la Geometría Egipcia es práctica, busca establecer reglas eficaces sobre el plan de la aplicación, sin ser estudiada en sí misma. Los egipcios calculaban correctamente las áreas de algunas superficies rectilíneas como el cuadrado, el rectángulo, el triángulo y el trapecio y disponen de una buena aproximación de la superficie *A* del círculo: $A=(\frac{8}{9}d)^2$, (donde *d* es el diámetro del círculo, para este caso tomamos un círculo de radio 1, con lo que $d = 2$) que corresponde a un valor de:

$$A=(\tfrac{8}{9} * 2)^2 = (\tfrac{16}{9})^2 \approx 3{,}1605, \text{ para } \pi.$$

Ellos muestran que, en un cuadrado cuyos lados miden 9 unidades, se inscribe un octágono (fig. 1). Cada uno de los triángulos isósceles formados en las esquinas del cuadrado tiene un área de $A_1 = \frac{3*3}{2} = 45$ unidades de área (unidades cuadradas). El área del cuadrado es igual $A_2 = 9^2 = 81$ unidades de área. El área *A* del octágono es la diferencia entre el área del cuadrado A_2 y el área de los cuatro triángulos isósceles $4A_1$ que vale:

$A= A_2 - 4A_1= 81 - 4*4{,}5= 81\text{-}18= 63$ unidades de área.

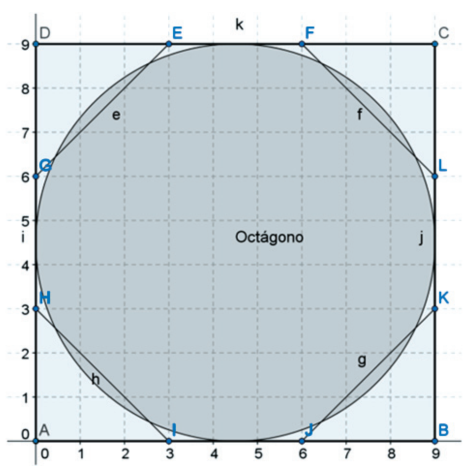


Figura 1.

principal de la matemática egipcia, como el Papiro del Rhind, el Papiro de Moscou y el Rollo de Cuero de las Matemáticas Egipcias. (Dahan-Dalmedico, A. – Peiffer, J., 1988, p.12).

De lo cual se puede decir que, el área del octágono es aproximadamente igual al área de un cuadrado de lado 8 y por otro lado coincide casi con aquella del círculo inscrito en el cuadrado de lado $\frac{8}{9}$ d.

La cámara fúnebre del padre de Ramsés II (hacia 1300 a.C.), que no se terminó, revela la manera en que proceden los egipcios para decorar las paredes y testimonia además de un conocimiento de las propiedades elementales de la *similitud* y de las reglas de una *teoría de proporciones*. Ellos recubren las paredes con una red de rectas horizontales y verticales que se cortan en un Angulo Recto, construida geométricamente de la misma manera que se realiza actualmente, desarrollando un croquis preparado con anterioridad sobre una cuadrícula.

Además, los egipcios que calculaban volúmenes de los materiales necesarios en la construcción de los monumentos, de las pirámides y de los graneros, encuentran que al multiplicar la superficie de la base *b* por la altura *h*, calculan el volumen del cubo, del prisma y del cilindro.

2.2. Geometría griega: la exigencia demostrativa

En las ciudades griegas de Asia Menor emerge en el siglo VI a.C. una forma de *pensamiento abstracto* que es la fuente de la ciencia occidental. Los principios de la filosofía y de la ciencia deductiva se desarrollaron en Mileto (centro intelectual) en Jonia. Este pensamiento racional tiene su fuente en la mítica y en lo ritual, que se libera progresivamente de la magia y de la religión (Kunzmann et al., 1993, p. 29-35).

La primera ciencia griega se pregunta sobre los orígenes del mundo (αρχηε) y responde a la pregunta: ¿cómo se formó nuestro mundo a partir del caos? Las primeras tentativas de respuestas de los filósofos de Mileto es presentar las explicaciones del mundo sensible, en un nivel abstracto, a partir de las mitologías antiguas. Las estructuras de sus descripciones sensibles del universo corresponden a aquellas de los *Mitos*, donde todas las cosas están mezcladas, como los opuestos: calor, frio, seco y húmedo,...

Igualmente, la sociedad griega se caracteriza por el $\alpha\gamma o\nu$ (combate) donde opone fuerzas concurrentes para afirmarse y consolidar sus opiniones, lo cual posibilita la producción del razonamiento y el paso progresivo del *mito* a la *ciencia* que se va volviendo un *bien público*. Uno de los objetos de discusión eran las *proposiciones matemáticas*, que no se concebían como simples enunciados que traducen los hechos empíricos, sino enunciados que necesitan una demostración conducente, de una proposición (premisa) a una conclusión; lo que muestra, el desarrollo de las Matemáticas griegas en general y el de la Geometría, en particular, que sigue un ascenso hacia la razón, a partir del trabajo de los jónicos, pitagóricos, eléatas, platónicos y alejandrinos.

2.2.1 Matemáticas Jónicas

Thales de Mileto (640-479 a.C.), hombre de estado, comerciante, ingeniero, filósofo y matemático, aprendió el Álgebra y la Geometría de los egipcios y babilonios, crea una escuela cosmológica y explica el devenir del Universo a partir de una sola sustancia el agua, susceptible de transformarse en todas las otras sustancias, porque al condensarse se dan los cuerpos sólidos, evaporándose produce el aire, y sostiene la tierra porque la envuelve por todas partes[5]. Así, Thales es el primer representante de esta nueva forma de racionamiento en Matemáticas.

5 Igualmente, Anaxímano, presenta el aire, como sustancia elemental y Anaximandro plantea, a su vez, lo indeterminado.

En Geometría se le atribuyen proposiciones como: *Todo diámetro divide el círculo en dos* (fig. 2), propiedad que se ve en los monumentos egipcios, así:

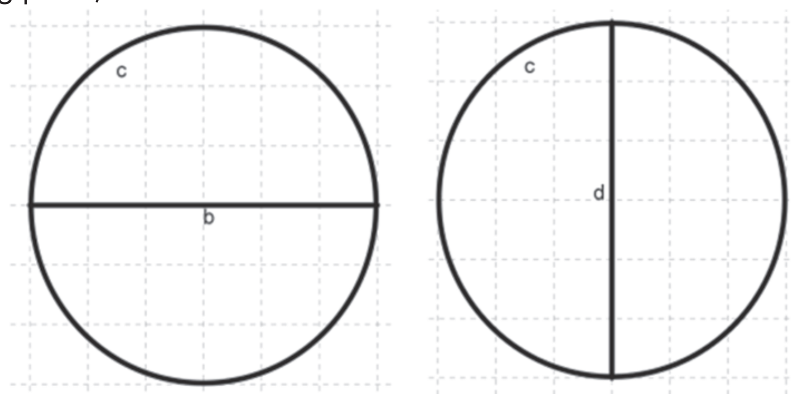


Figura 2.

De igual manera, se le debe a Thales el *Teorema de Thales* o el *Teorema de la Intersección* que afirma: *en un plano, una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, secciona este último en un triángulo semejante* (fig. 3). Esto se explica por el cálculo de la altura de una pirámide al medir la longitud de su sombra al suelo y la longitud de la sombra de un pilote de altura dada. La demostración escrita, más antigua, de este teorema es dada en los *Elementos de Geometría* de Euclides (proposición 2 del Libro VI) y reposa sobre la *proporcionalidad* de las áreas de triángulos de igual altura.

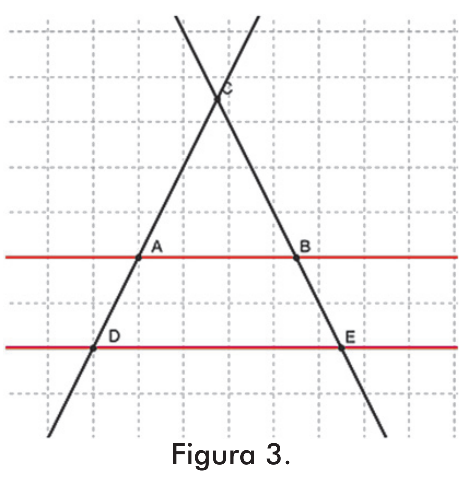


Figura 3.

Esta escuela de Thales pierde su importancia y es suplantada por aquella de los *Pitagóricos.*

2.2.2 Pitagóricos

Pitágoras nace en la isla de Samos, a lo largo de Mileto, en la primera mitad del siglo VI, es alumno de Thales, se instala en Crotona al sur de Italia y funda una secta religiosa, filosófica y científica con vocación política (585-400 a.C.). La concepción cosmológica abandona la idea monista de los Jónicos, es dualista y ven en el αγον o tensión entre los principios opuestos (límite-ilimitado, impar-par; uno-múltiple,…) el origen de todo devenir del mundo. Además plantean que, una explicación global simbolizando la totalidad del cosmos, se encuentra en el número: *todas las cosas son números,* que son además, constitutivos de la materia.

Los Pitagóricos identifican los números a conjuntos de puntos dispuestos en configuraciones geométricas, como la imagen que resulta de puntos diseñados en la arena o de piedras dispuestas sobre el suelo o, "de la manera como las estrellas esquematizan una constelación".

Esta escuela está al origen de la *Aritmética*, que es geométrica y clasifica los números según la forma de las estructuras correspondientes a puntos, en números triangulares, cuadrados, pentágonos, etc. (fig. 4).

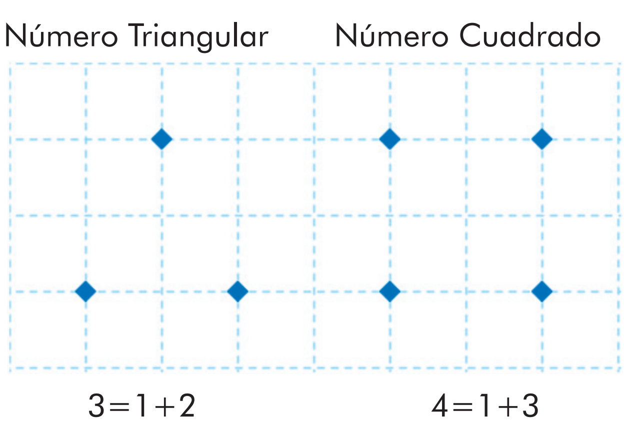


Figura 4.

La Aritmética es igualmente visual: las propiedades de los números son directamente legibles en los arreglos geométricos, por ejemplo, el número cuadrado 4, es la suma de dos números triangulares: 1 y 3, como se ve en la figura 4.

Anotaciones

Se puede decir que, cada número es una colección discreta de unidades, la Aritmética Pitagórica se limita al estudio de los números enteros y positivos y de las relaciones de números enteros que eran considerados números igualmente. Toda dimensión continua (línea, superficie, cuerpo) podía ser identificada a un número, o sea al área, volumen o longitud, que le correspondía. Esta tentativa de identificar los números enteros a las dimensiones continuas, es decir interpretar lo *continuo* en términos de *discreto* no podía llegar a su fin y fracasa con el encuentro de los *números irracionales*. De manera que en un cuadrado de lado 1, la relación de la diagonal al lado vale $\sqrt{2}$, lo que no se puede expresar por un número entero y no tiene ningún estatuto en la Aritmética Pitagórica. El lado y la diagonal no tienen unidad de medida común y son llamados *inconmensurables*. De ahí, el naufragio de esta correspondencia, lo que conduce a la primera crisis en la historia de las Matemáticas y el fin de los Pitagóricos.

Por otro lado la escuela pitagórica plantea la idea que el Mundo y particularmente el mundo celeste está sometido a reglas eternas de los números y las figuras, lo que provoca la convicción que los cursos de los astros se hacen por combinaciones de movimientos circulares y uniformes, lo que da nacimiento a la *Astronomía Geométrica*. (Duhem, 1913, p. 9), que es luego tomada por Platón en su cosmología.

2.2.3 Los Eléatas

La influencia de esta escuela (siglo V a.C.) es enorme en la formación de un pensamiento abstracto. Su fundador es Parménides (540-

6 Parménides de Eléa es un filósofo griego presocrático, célebre por su poema: *Sobre la Naturaleza*, que tuvo una influencia notable en el pensamiento de su

470 a. C.)[6] quien hace una división rigurosa entre lo sensible y lo inteligible, lo que conlleva a la ineludible confrontación de la experiencia con las exigencias de la razón. Hecho, por el cual se oponen a los Pitagóricos, porque es imposible representar por números enteros todas las cosas. Si los objetos discretos pueden ser representados por los números enteros, no sucede lo mismo con las *magnitudes continuas* como las longitudes, áreas, volúmenes, etc., que no pueden ser interpretados como colecciones discretas de unidades, al menos que se conciba una infinidad de elementos muy pequeños que compondrían estas colecciones. En este sentido, dos concepciones se oponen: la concepción *continuista* que piensa el número, el espacio, el tiempo y la materia como divisibles al infinito y la concepción *atomista* que preconiza la existencia de elementos primeros indivisibles. Zenón de Eléa (495 a.C.) presenta varias paradojas que ilustran la imposibilidad de la existencia de una materia divisible de manera infinita y la imposibilidad del movimiento si está compuesto de elementos indivisibles, es decir que con las dos corrientes se llega a una *aporía o contradicción*.

Así, en *Aquiles y la tortuga*, Zenón se opone a la divisibilidad infinita del espacio y del tiempo. Aquiles compitiendo con la tortuga se muestra como buen corredor y le concede una ventaja a la tortuga. Mientras que el recorre la distancia que lo separa del punto de partida de la tortuga, ésta avanza a su vez; pero si la distancia entre Aquiles y la tortuga se reduce, la tortuga conserva su ventaja. Si el espacio es divisible al infinito, Aquiles no podrá jamás alcanzar a la tortuga, lo que está en juego en esta paradoja, es la dificultad de sumar una infinidad de cantidades de más en más pequeñas y la imposibilidad de concebir intuitivamente que esta suma pueda ser igual a una magnitud finita.

época. Sus descubrimientos intelectuales, en particular la introducción a la Lógica en el pensamiento helénico, al lado de la filosofía de Mileto de la naturaleza y de las teorías aritméticas de Pitágoras, hacen de Parménides uno de los filósofos más importantes de la historia de la filosofía griega.

El argumento es más explícito en la dicotomía (fig. 5), porque antes de poder recorrer una línea entera, se debe recorrer la mitad de esta línea, luego la mitad de esta mitad y así hasta el infinito.

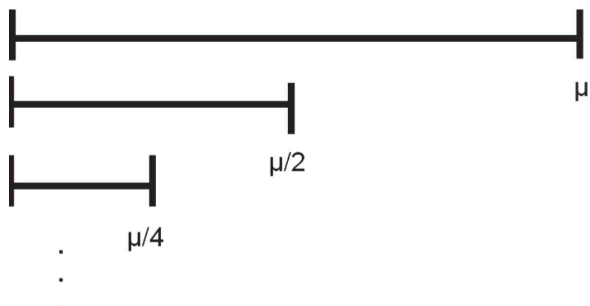


Figura 5.

2.2.4 La Academia Platónica

Patón (Atenas, 427-347 a. C.), filósofo, funda la *Academia* en 385 a.C. que subsiste más de 1000 años. Principalmente, para el afianzamiento del pensamiento abstracto él va a plantear la *Teoría de dos Mundos*: el mundo sensible, en el que vivimos y el mundo inteligible de las ideas. El Mundo de las ideas ($\alpha\iota\delta\iota\alpha\varsigma$) que son esencias inmateriales, eternas, como arquetipos de la realidad y base de los objetos del mundo real. Estas ideas ($\alpha\iota\delta\iota\alpha\varsigma$) existen de manera objetiva.

La explicación de estos dos mundos, se encuentra en el *Paradigma de la Línea (Política – La República)*, en donde el mundo puede dividirse en dos veces dos dominios, que tienden al *bien*, principio radical de todas las ideas y principio y fin de todos los seres humanos:

- El mundo visible dividido en:

  - Lo que es percibido indirectamente (la sombra, el reflejo en los espejos).

  - Lo que se percibe directamente: objetos reales.

- El mundo de aquello que es accesible por el espíritu dividido en:
    - Los dominios de la ciencia, como los objetos matemáticos, que al ir más allá de su soporte material (figuras geométricas) llevan a un conocimiento intelectual como los teoremas intelectuales.
    - El reino de las ideas que es accesible a la razón pura.

El *Paradigma de la línea*, se puede ver de la manera siguiente:

Accesible a los sentidos		Accesible a los pensamientos	
Conjetura (εικασια)	Creencia (πιστισ)	Conocimiento discusivo (διανοια)	Inteligencia (νοεσισ)
Imágenes	Seres vivientes y cosas	Objetos matemáticos	Ideas

Por lo cual, si los objetos sensibles están sometidos al cambio no pueden ser percibidos sino subjetivamente, al contrario, sus modelos son inmutables, permanentes y universales.

Es en el *mundo de las ideas* que los filósofos de la Academia Platónica buscan el conocimiento verdadero, porque su objetivo es conocer lo que es *siempre, permanente* y no lo que es en un momento dado y luego desaparece: “la recta trazada en la arena no es sino una realización imperfecta de la recta abstracta que sugiere la recta ideal, y es entonces objeto de conocimiento matemático”. Por ejemplo, el filósofo-geómetra, no será capaz por sí mismo, de enumerar dos objetos, si no tuviera en él la idea de número y la esencia del número 2.

Como las ideas son eternas, anteriores a toda experiencia, son asequibles intuitivamente como objetos que se pueden contemplar mentalmente, lo que tiene una consecuencia sobre el plano de la demostración, donde todo recurso a la experiencia está prohibido. Así, solamente es posible el uso exclusivo del razonamiento deductivo, lo que transforma radicalmente las Matemáticas. El objetivo está en la búsqueda de la verdad eterna e inmutable, contrario a los razonamientos por analogías o por inducción que no ofrecen ninguna certeza a nivel de las conclusiones; la deducción, al contrario, conduce a resultados absolutamente ciertos, si las premisas son correctas.

De la misma manera, aparece la separación de las matemáticas puras, que facilita el pasaje de lo sensible a lo inteligible y a la verdad; y las matemáticas aplicadas, que son simples herramientas de trabajo de los comerciantes, de los hombres de negocios y de los artesanos.

Igualmente, en el discurso del *Timeo*[7], Platón se propone la formación del universo o la de la Cosmología y da una explicación general del mundo abordando las preguntas del conocimiento científico y precisando el lugar de las Matemáticas en esa cosmología. Así, el *Demiurgo*, creador del Universo, hace pasar el mundo del desorden caótico al orden. Él da al mundo una forma esférica, que es la más perfecta de todas las formas y atribuye un movimiento apropiado a su cuerpo, un movimiento de rotación sobre él mismo, sin cambiar de lugar y prohíbe los otros seis movimientos: arriba-abajo, izquierda-derecha, adelante-atrás.

Por otro lado, presenta los cuerpos como compuestos de triángulos infinitamente pequeños. Los triángulos pueden ser: escalenos, isósceles o equiláteros:

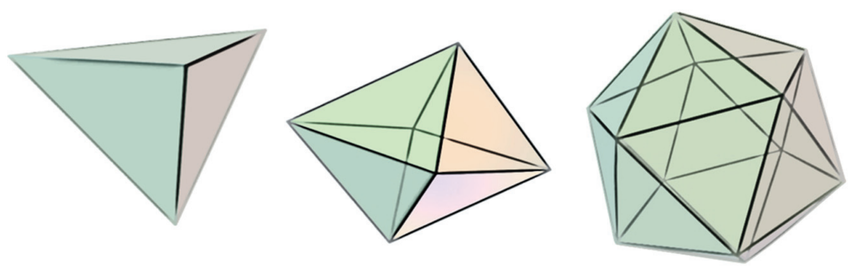
7 Hay también alusiones a la Física y a la Astronomía que se encuentran en otros diálogos de Platón, como el *Fedón* y *la República*. De esta manera, inspirado por la Metafísica, las teorías físicas y astronómicas de Platón, están ligadas íntimamente a analogías geométricas y aritméticas donde se encuentran las tendencias de la Escuela Pitagórica. (Duhem, 1913, p. 29-30).

- Escalenos: los tres lados son diferentes, los tres ángulos son diferentes.

- Isósceles: dos lados idénticos, dos ángulos idénticos.

- Equiláteros: tres lados idénticos, tres ángulos idénticos.

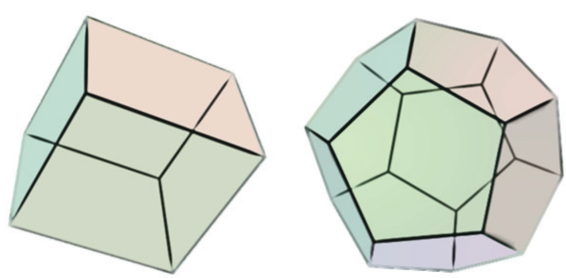
Los cuerpos compuestos son constituidos por combinaciones de los triángulos que dan triángulos más grandes, cuadrados o pentágonos. Al combinar los escalenos engendran: el tetraedro (cuatro caras triangulares), el octaedro (ocho caras triangulares), el icosaedro (veinte caras triangulares) (fig. 6).



Tetraedro Octaedro Icosaedro

Figura 6.

Los triángulos isósceles forman el cubo y el dodecaedro (fig. 7).



Cubo Dodecaedro

Figura 7.

Estos (fig. 6 y fig. 7) son los *poliedros regulares,* que son formas tridimensionales, es decir que delimitan un volumen de un espacio a tres dimensiones. Sus caras son polígonos regulares (partes de planos), las caras se encuentran en las *aristas* (segmentos de rectas) y las aristas convergen en los puntos llamados *cimas*.

Los cinco poliedros anteriores, son los tradicionales o convexos regulares, nominados los *Sólidos de Platón*.

Anotaciones filosóficas:

Platón con estos planteamientos, presenta la paradoja de lo uno y lo múltiple y busca un equilibrio: lo múltiple proviene de lo uno y en esa variedad tan grande de cuerpos, se pregunta sobre cómo idealizarlos, lo que conforma uno de los grandes esfuerzos de la filosofía griega. Al referirnos a Plotino (hacia el 204 - 270, de la escuela de Alejandría y luego de Roma, padre del Neoplatonicismo), el centra su estudio sobre lo Uno, lo que había sido también el núcleo de Parménides (540 - 470 a.C.)[8], de manera que para armonizar o encontrar un equilibrio en el mundo es necesario referirse a lo uno y lo múltiple y preguntarse cómo pasar de lo uno a lo múltiple o viceversa.

Anotaciones históricas

Es a partir de los lineamientos establecidos en la Academia de Platón, practicados por Euclides que aparecen los *Elementos de Geometría*, con lo que se enriquece el patrimonio de las verdades matemáticas conocidas, comenzando por hacer aparecer el orden jerárquico de un sistema matemático. Así mismo, los principales resultados del siglo IV a. C., sobre las secciones cónicas en particular, son atribuidos a los discípulos de Platón que se interrogan sobre la naturaleza y estructura de las Matemáticas.

8 La manera lógica de interpretar a Parménides, consiste en dejar el espacio del sujeto vacío, el cual puede recibir cualquier sujeto positivo. Así a una x se le substituyen variables apropiadas; es decir que el campo del ser queda vacío, abierto para el juego finito de proposiciones afirmativas. (*Encyclopaedia Universalis*. Corpus 17. Paris, Editeur à Paris, 2002. p. 413-414).

Igualmente, en la *Biblia*, *Antiguo Testamento,* se muestra cómo el mundo helenístico de la ciencia, sabe ya expresarse y penetra los círculos babilónicos, haciendo alusión a la medida, al número y al peso de los cuerpos.

2.2.5. La Geometría de Euclides

La Geometría griega, consecuentemente, integra los conocimientos anteriores, pero rompe radicalmente con el pragmatismo de la geometría babilónica-egipcia y parte de la griega, en donde se constituye con plena autonomía, independiente de lo mítico y de la religión. Los *Elementos de Geometría* de Euclides, se imponen como una ciencia abstracta y deductiva, caracterizada de perfección, rigor y elegancia en su construcción y demostraciones. Dentro de la concepción filosófica de la ciencia, los *Elementos de Euclides* con los *Analíticos* de Aristóteles (385-322 a.C, Estagira, Macedonia)[9], marcaron el camino del pensamiento moderno.

Su autor, Euclides (315-255 a.C.)[10] vive en Alejandría, en la época de Tolomeo I, es posterior al grupo de Platón y anterior a Eratóstenes y Arquímedes. Euclides, tomando ciertos lineamientos de Platón y siguiendo su filosofía concibió los *Elementos* en toda su globalidad[11].

9 Aristóteles fundador de la lógica, la presenta como el conjunto de reglas que permiten realizar un discurso coherente y eficaz. Se preocupa por administrar y definir el lenguaje, hace de éste el instrumento (ʃργανον) del pensamiento, capaz de dominarse él mismo y de ahí imponer su ley a la naturaleza. Pensador enciclopédico, reconoce la especificidad de los diferentes saberes y la unidad propiamente humana del discurso. (*Encyclopaedia Universalis*. Corpus 2. Paris, Editeur à Paris, 2002. p. 959).

10 Esta fecha se basa en los pasajes del libro de Proclus: Comentarios del I Libro de los Elementos de Euclides.

11 Los Elementos de Euclides no llegaron a nosotros en su obra original sino en copias en latín, griego y árabe en las que los autores de éstas, añadieron variaciones y sus propios comentarios. Entre las más antiguas se destacan dos versiones árabes de los textos de Herón de Alejandría y Pappus de Alejandría escritos hacia los años 100 y 325 a. C. El *Comentario al Libro I*, llegó hasta nosotros en griego, realizado por Teón de Alejandría y aparentemente por su hija Hipatia (siglo IV). Esta obra fue copiada tanto en árabe como en latín

Los *Elementos* resultan de la estructuración sistematizada de trabajos anteriores de Eudoxio, del Theeteto de Platón y de otros, donde recopila gran parte del saber matemático de su época. Esta estructuración atestigua, en parte, de la importancia de la lógica de Aristóteles en los *Elementos*. Con este propósito, Brunschvicg, L. (1972, p. 84) cita Leibniz, en los *Nouveaux Essais* (Nuevos Ensayos):

> *"No son las figuras que dan la prueba a los geómetras…La fuerza de la demostración es independiente de la figura trazada, que está allí para facilitar la inteligencia de aquello que se quiere decir y sobre lo que se quiere llamar la atención; son las proposiciones universales, es decir las definiciones, los axiomas y los teoremas demostrados que realizan el razonamiento y contienen las figuras cuando éstas no existen"*

De lo cual, se puede decir que la lógica o la manera de argumentar de Euclides, llegó a una gran madurez, capaz de sugerir la idea de una *combinatoria lógica* y de presentar los medios para realizarla, en toda perfección. De manera que, se puede pensar que la lógica aristotélica y la Geometría de Euclides se aclaran mutuamente, y en ambas se inscribe el ideal de armonía interna griega.

Las traducciones árabes comienzan en el siglo IX por medio del siríaco y de ellas se conservan algunas copias por las cuales se pudo conservar la herencia griega de los Elementos. Así, las matemáticas griegas y el desarrollo de las árabes pasaron al mundo cristiano, a través de la Escuela de Traducciones de Toledo; una de las traducciones destacadas es la realizada por Gerardo de Cremona. Otra traducción destacada es la de Adelardo de Bath, filósofo escolástico inglés del siglo XII. El matemático y astrónomo italiano Giovanni Campano o Campano de Novara, a partir de la traducción de Adelardo, en 1255 realiza una edición comentada en latín que sería la que el impresor Erthard Ratdolt realizó en Venecia, convirtiéndose en el principal texto de las escuelas europeas.

Los Elementos son consider*ados como uno* de los libros de texto más divulgado en la historia y el segundo en número de ediciones publicadas después de la Biblia (más de 1000). Durante varios siglos, en el Medioevo, la enseñanza estaba estructurada en el trívium y el quadrivium, este último exigía el conocimiento de este texto. Aún hoy se utiliza por algunos educadores como introducción básica de la Geometría.

Estructuración del contenido de los Elementos

Euclides en la organización de su obra, presenta primeramente las Definiciones, luego los Axiomas y finalmente los Postulados, así:

Definiciones

Los *Elementos* comienzan por una serie de *definiciones;* éstas son *definiciones nominales,* dadas con el objetivo de aclarar, por medio del lenguaje, aproximándose a la experiencia y a los elementos usados en la técnica de construir objetos geométricos, y que por esto su alcance es *empírico*.

De manera que, por ejemplo, es un hecho natural que existen elementos-límite a partir de los cuales no hay posibilidad de un progreso apreciable ni de una división, como, el *átomo*, para un físico o el *punto*, para el geómetra, etc.

En consecuencia, en el Libro I de los *Elementos*, el *punto* es aquello que no tiene ninguna parte, es decir un elemento que no tiene longitud; se concibe una longitud como lo que no tiene anchura (definición II), o una superficie que tiene longitud y anchura (definición V). Los puntos son entonces considerados como las extremidades de las líneas (definición III), y las líneas como las extremidades de las superficies (definición VI).

Las definiciones de la línea recta y de la superficie plana se ven como, la línea recta aquella que se realiza en todos sus puntos (definición IV); y el plano, como la superficie que se realiza en todas las rectas que la contienen (definición VII).

Axiomas

Muchas de las definiciones del primer Libro, son del tipo *silogismo* de Aristóteles, que parte del género al cual pertenece un elemento, pero tiene en cuenta la diferencia o particularidad de éste con respecto al género. Por ejemplo, un silogismo como: "Todos los pájaros tienen alas. Todas las palomas son pájaros. Entonces, todas las palomas tienen alas", muestra claramente el encadenamiento de la argumentación. La evidencia que se encuentra en estas frases se puede descomponer en etapas estándares de razonamiento. Así, la clase de pájaros está incluida en aquella de los animales que tienen alas y la clase de las palomas en aquella de los pájaros. Todas estas clases pertenecen a una clase universal que contiene a la vez estos elementos e igualmente otros propios de los animales en general. Este corte en clases de objetos de pensamiento viene de un principio de base: la *inclusión,* o sea el objeto está en la clase, o no está, no hay situación intermediaria. La inclusión o no va a depender de la posesión de propiedades particulares del objeto, como el de animales con alas u otra propiedad particular (Blanché-Dubucs, 1996, p.45-67).

De esta manera, para el caso de la Geometría de Euclides, por ejemplo, las propiedades genéricas de la *clase* de los ángulos, incluyen las de los ángulos obtusos, que igualmente tienen sus particularidades, las que los distinguen de los agudos y rectos. Este tipo de razonamiento, es el que utiliza Euclides, transformándolo en conocimiento explícito, en donde las verdades implícitamente contenidas dentro de la afirmación general del silogismo las presenta de forma evidente.

Así, a las definiciones euclidianas, se les aplica la *lógica de clases*, de manera que para pasar de esta lógica a la Geometría, hay que proceder por medio de una doble elaboración, la una sobre el modo de deducción y la otra sobre los objetos mismos (por ejemplo los ángulos).

En este sentido, en el caso de la deducción, el primer *axioma* de Euclides podría ser llamado el principio del silogismo matemático: *las cosas iguales a una misma cosa son iguales entre ellas.* El axioma puede explicarse bajo la forma silogística, así:

$$A = B$$
$$B = C$$
$$C = A$$

En el caso de los objetos mismos, a este silogismo se le puede dar una forma, un cuadrado, por ejemplo, en donde la verdad sea evidente y en donde se pueda hacer depender el axioma euclidiano de igualdad.

Anotaciones epistemológicas

Este primer axioma fue puesto en evidencia por Apolonio, porque *A* es igual a *B* se refiere al mismo lugar, y porque *B* igual a *C* se refiere también al mismo lugar anterior, lo que quiere decir que comprende también el mismo lugar para C, y por consecuencia *A* y *C* son iguales. Para lo cual, Apolonio presenta dos hipótesis: las figuras que comprenden el mismo lugar son iguales entre ellas y las figuras que comprenden el mismo lugar con cualquier otra, son iguales entre ellas. En otros términos, Apolonio desplazó el campo de evidencia: lleva la igualdad a la identidad de medida espacial sabiendo que precisamente es una problemática saber si la *identidad de medida espacial* puede ser asimilada a *la identidad lógica*. En consecuencia, cuando se responde a esta pregunta afirmativamente, se invoca un axioma que estaría elaborado en una terminología diferente, pero equivalente a este axioma de Euclides. De manera que, si Apolonio no vio la necesidad de explicitar este axioma, es que por su intuición de geómetra, podía substituir directamente, las líneas o las superficies de medida idéntica y hacer de esta substitución una definición general de la igualdad. Es un procedimiento contrario al de Euclides que consiste en transformar por medio de una elaboración deductiva el enunciado intuitivo en un enunciado formal.

Euclides utiliza primero la noción abstracta de igualdad con el fin de constituir el marco lógico en el cual deberá presentar los razonamientos de la Geometría. Luego determina la condición que permitiría adaptar a este marco las superficies que son el objeto propio de la ciencia geométrica. Por ejemplo, en el Axioma V: *dos* *superficies que pueden aplicarse la una a la otra, porque son congruentes, son iguales entre ellas*.

Es decir, de la misma manera que la forma perfecta y científica del silogismo, se basa sobre la evidencia de la relación entre términos de proposiciones universales afirmativas, así mismo, el principio de igualdad directa, el axioma I de Euclides, se basa en los casos de igualdad que resultan de la adición o de la sustracción de elementos iguales a elementos iguales entre ellos.

Por otro lado, en el axioma VIII: *el todo es más grande que la parte*, introduce la consideración de la *desigualdad;* sobre ésta se fundan una serie de axiomas, a los cuales se incluyen adiciones posteriores a la redacción primitiva de los Elementos, por los sucesores de Euclides, y que constituyen en el cuerpo de la doctrina, una verdadera *Analítica de la Geometría* paralela a la *Analítica de la Lógica Formal* de Aristóteles (Brunschvicg, 1972, p. 88-89).

Postulados

La *Lógica de la Geometría*, necesita que los objetos geométricos definidos, sigan un tratamiento que los vuelva maleables en esta lógica, y es con este fin que se destinan los tres primeros postulados, cuya simplicidad corre el riesgo de disimular su importancia:

(i) Que sea ordenado, pasar de un punto cualquiera a un punto cualquiera, una línea recta.

(ii) Que sea ordenado, prolongar en línea recta y en continuidad una recta limitada.

(iii) Que sea ordenado, escribir un círculo de centro cualquiera y de distancia cualquiera (un radio).

Para el primer postulado, la recta se vuelve la distancia entre dos puntos, pero aquí no explicita la unicidad de la línea recta.

Para el segundo postulado es posible la adición de elementos geométricos.

El tercero tiene un doble alcance: establece la existencia de la figura circular cuya definición indicaba solamente esa propiedad, es decir *tener todos los puntos de su periferia iguales según la distancia del centro*. De esta propiedad resulta el instrumento por excelencia de la actividad científica: trazando de un punto dado una circunferencia, se obtienen todas las direcciones que se quieran de líneas iguales; se obtiene así una *igualdad estática* de la superposición de la *igualdad moviente del radio*.

Estos postulados son la base de la ciencia euclidiana y se manifiestan desde la primera proposición de los elementos. Esta proposición es: *sobre una recta dada construir un triángulo equilátero.* La solución del problema es inmediata si a partir de cada una de las extremidades de la recta se describe un círculo teniendo por radio la longitud misma de esta recta. Entonces, se ve sobre la figura 8, que Euclides admite sin otra explicación, que los dos círculos se encuentran; si, en virtud del postulado primero, se articula uno de los puntos de encuentro a las extremidades de la recta dada, se obtiene así un triángulo que cumple las condiciones del problema, la posibilidad del triángulo equilátero es entonces demostrada.

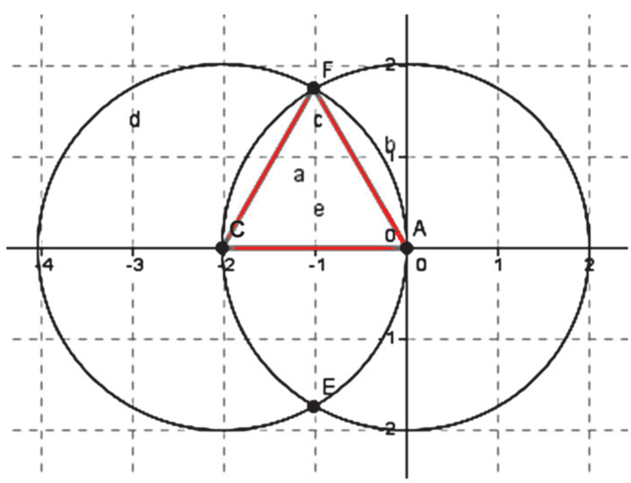


Figura 8.

Anotaciones epistemológicas

En términos modernos para esta proposición, se dirá que a la descripción lógica que enuncia el género (recta) y la especie (círculo) se le agrega un teorema de existencia (la construcción del triángulo equilátero).

Entonces, el procedimiento general se funda sobre la metodología propia a la matemática siguiendo los antiguos griegos. Aristóteles dice: *el geómetra supone el significado del triángulo, pero se puede ver la existencia*. De manera que, sin recurrir a una hipótesis ontológica (por ejemplo, la propiedad de la triangularidad) que es la virtud o característica oculta de la lógica aristotélica, la Geometría euclidiana es capaz de conferir a sus definiciones nominales, el valor de una definición real (en sus formas gráficas); es por eso que ella es otra cosa que el instrumento de un razonamiento formal y se vuelve una ciencia verdadera.

En el desarrollo de la Geometría Métrica, Euclides encuentra dos nociones que son necesarias para edificar el sistema de la Geometría Plana y que no pueden ser consideradas como consecuencias de verdades adquiridas; estas nociones son aquellas de perpendiculares y de paralelas. Más exactamente, a las dos nociones de *perpendiculares* y de *paralelas* se unen dos hechos geométricos que no son susceptibles de demostración, que deben ser introducidas a título de *datos naturales* y que generan dos nuevos postulados.

En cuanto a las perpendiculares: *todos los ángulos rectos son iguales*. Parece extraño que Euclides formule esta proposición, después de haber definido el ángulo recto con la ayuda de la construcción, haciendo *caer una recta sobre otra, determina dos ángulos adyacentes iguales* (fig. 9); es por la igualdad de estos dos ángulos que llega a concebir el carácter específico del ángulo recto.

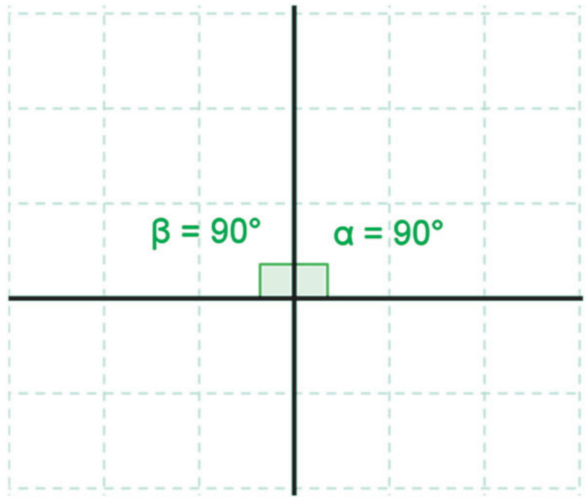


Figura 9.

Pero al observar la aplicación que se hace de este postulado (Zeuthen, 1896, p. 101)[12] se comprende que Euclides, tiene por objetivo enunciar la recíproca de la definición, es decir, que *si dos ángulos rectos son adyacentes, las rectas situadas de un lado y del otro lado común están sobre el prolongamiento la una de la otra* (fig. 10). La condición de unicidad, que estaba latente en la concepción de la línea recta, se explicita de esta manera.

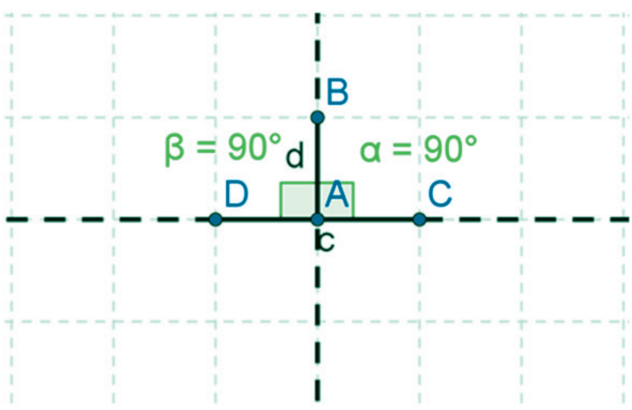


Figura 10.

12 Citado por Brunschvicg (1972, p. 92).

En cuanto a las paralelas, agrega Euclides, igualmente un postulado. Para él, las *líneas rectas son paralelas, cuando situadas en un mismo plano y prolongadas de una parte y otra al infinito, ellas no se encuentran de ningún lado* (fig. 11); definición singular, por su naturaleza a la vez relativa a la intuición y colocada más allá de los límites de toda intuición efectiva.

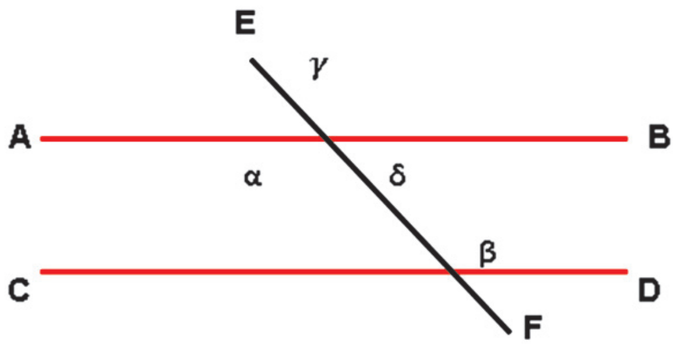


Figura 11.

Sin embargo para probar esta definición y basar de una manera positiva los razonamientos relativos a las paralelas, tiene necesidad de una proposición de existencia; entonces el postulado de las paralelas en Euclides indica las condiciones en las cuales existe un punto de intersección entre dos rectas que se encuentran con una tercera: *Que sea ordenado, que si una recta que encuentra dos rectas (situadas en un solo plano) hace de un mismo lado ángulos interiores cuya suma sea menor que dos rectos, las dos rectas prolongadas infinitamente se encuentran del lado cuya suma es inferior a dos rectos* (fig. 12).

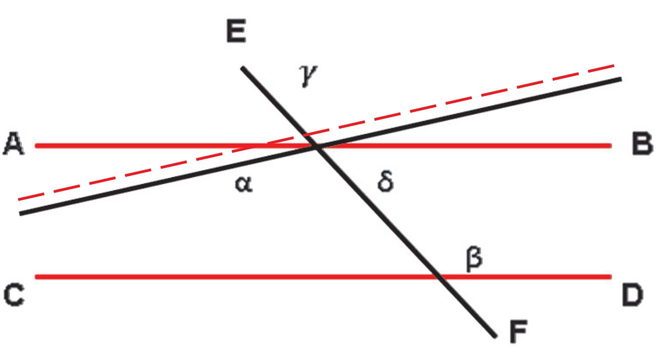


Figura 12.

Este último postulado creó gran controversia, por su dificultad en la demostración, creando lo que se llamó la *Crisis de los Fundamentos de las Matemáticas*, a finales del siglo XIX y además condujo a la creación de la *Geometría no-euclidiana*.

Estructura de los Libros de los Elementos

Estos comprenden 13 Libros originales de Euclides, a los cuales, más tarde, se adicionan dos libros más (XIV y XV).

El contenido de los 13 primeros libros es el siguiente:

- Libros I al IV tratan sobre Geometría Plana.
- Libros V al X tratan sobre razones y proporciones.
- Libros XI al XIII tratan sobre Geometría de los cuerpos sólidos.

Libros I al IV: Geometría Plana

Los cuatro primeros libros presentan una Geometría caracterizada por la *ciencia natural* (como la explicación de los fenómenos del mundo), estudian las propiedades fundamentales de las figuras rectilíneas y de los círculos. Los problemas que aborda se construyen con la ayuda de la regla y el compás como realizaciones materiales de la recta y el círculo.

Con estas bases del edificio geométrico, se asegura la existencia de figuras fundamentales (la recta y el círculo), a partir de los cuales, los griegos construyen todas las otras figuras consideradas, y determinan las propiedades del espacio euclidiano.

Este espacio es infinito y homogéneo porque cualquier recta finita se puede prolongar continuamente, todos los ángulos rectos son iguales entre ellos y las figuras geométricas no se modifican en los desplazamientos.

De esta manera, los dos primeros libros (I y II) tienen por objeto la construcción de las figuras y su transformación por medio de trazos auxiliares y demuestran la igualdad de las superficies diferentes: rectángulos, paralelogramos o triángulos. Los Libros III y IV estudian el círculo y la inscripción de los polígonos regulares en el círculo.

La última proposición del Libro I: *en los triángulos rectángulos, el cuadrado descrito sobre el lado opuesto al ángulo recto es igual a los cuadrados construidos sobre los lados que comprenden el ángulo recto*, proporciona a este espacio una métrica (medida de distancias). Este teorema, ya utilizado por los babilonios, fue introducido por Pitágoras en la matemática griega y ellos vieron la necesidad de demostrarlo y de deducir sus consecuencias. En la figura 13 se muestra geométricamente el desarrollo del teorema:

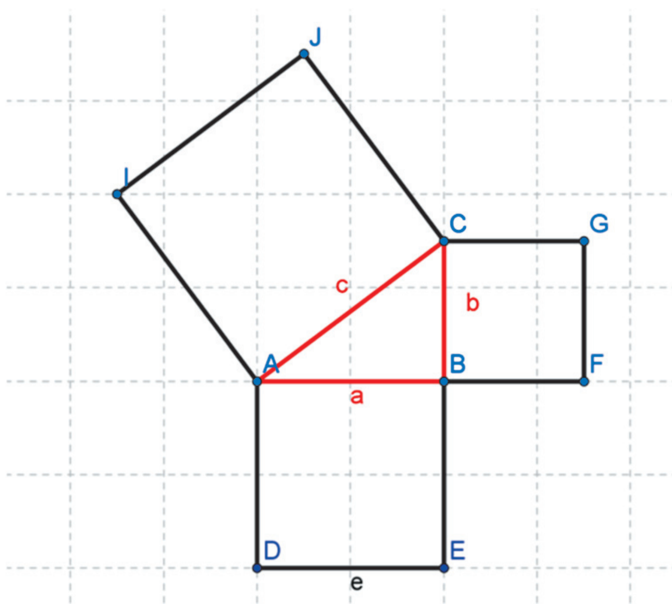
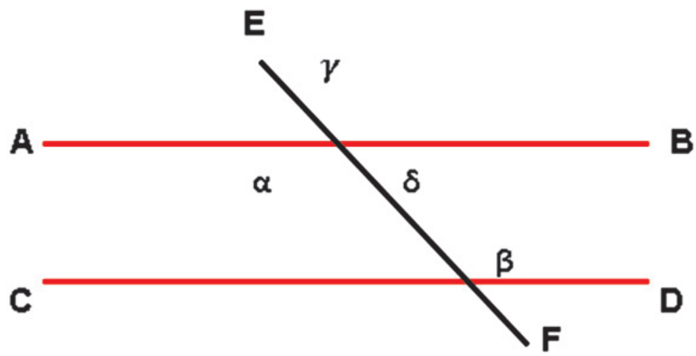


Figura 13.

Así mismo, en el espacio de la Geometría euclidiana, *la suma de los ángulos es igual a dos ángulos rectos* que resulta de una proposición de la teoría de las paralelas (proposición 29, Libro I: *Una recta que cae sobre dos rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales* *entre ellos, el ángulo exterior igual al ángulo interior opuesto y colocado sobre el mismo lado, y los ángulos interiores colocados del mismo lado, iguales a dos rectos* (fig. 14). En la demostración, Euclides se basa en el postulado de las paralelas, inclusive si éste tiene un lugar aparte en el edificio euclidiano.



$\alpha = \beta$

$\gamma = \beta$

$\delta + \beta = \pi$

Figura 14.

Libros V al X: Razones y Proporciones

Con el Libro V una ciencia nueva comienza, la que tiene por objeto la comparación de dimensiones tomadas en general. El elemento es la relación de *magnitudes* y en este sentido definen las proporciones. La teoría de las proporciones tiene sus orígenes en la similitud geométrica[13].

Se sabe que desde el siglo IV a. C. Eudoxio de Cnide, con el fin de solucionar el problema creado por el descubrimiento de los

13 El Manual de *Ahmes* muestra cómo, sin enunciar doctrinas generales, los egipcios se inspiraron en la práctica del sentimiento de la similitud (Tannery, P. La *Géométrie Greque*, 1887, p. 92). Citado por Brunshvicg 1972, p. 90.

inconmensurables, se da a la tarea de sacar del conjunto de las verdades conocidas de la Geometría, los elementos de la teoría de las proporciones y reunirlos en un solo cuerpo de doctrina autónoma. Así, la obra de Eudoxio explica la organización de los *Elementos*. Euclides separa, en la *Geometría plana* lo que se llama la *Geometría métrica directa, y la teoría de las proporciones*. De una parte, en los cuatro primeros Libros no presenta ningún modo de demostración que implicaría un llamado a la *similitud geométrica*. Desde ese punto de vista de la coherencia, Euclides replantea la demostración tradicional del teorema de Pitágoras. Por otro lado, el deja la similitud de los triángulos, paralelogramos, etc. para el libro VI, que sigue inmediatamente al libro de las proporciones. Con esto, Euclides realiza una aplicación de una ciencia de la proporcionalidad en general.

En el Libro VI, los términos de las proporciones fueron representadas por líneas, sin que se tuviera en cuenta la diferencia de las magnitudes medibles y las magnitudes no medibles. En el Libro VII, el estudio de las proporciones se retoma, pero sobre el terreno numérico: *las proposiciones sobre las proporciones toman un nuevo sentido porque no se trata solamente de la igualdad de las relaciones, sino también de la posibilidad de reducirlas a términos más pequeños*.

En el Libro X, Euclides aborda las proporciones no-medibles; expone la clasificación de los irracionales, resultado de las *construcciones geométricas…con sus propiedades no solamente por la ecuación de segundo grado y por la ecuación bi-cuadrada a coeficientes racionales, sino inclusive para la ecuación tri-cuadrada.*

Libros XI al XIII: Geometría de los cuerpos sólidos

El estudio realizado en el Libro X, es una introducción de la *Geometría del Espacio*. La determinación de los elementos de los poliedros regulares en el Libro XIII, dará una aplicación de la teoría de los irracionales, que había sido presentado en el Libro X.

Anotaciones epistemológicas

La ciencia euclidiana implica una *Teoría General de las Dimensiones,* es decir una *Aritmética Universal* que presenta la forma racional y deductiva acumulada durante muchos siglos. Sin embargo, esta Aritmética tiene las características de la ciencia antigua, es decir pensada ésta con restricciones en relación a la ciencia moderna, dentro del universo matemático. Por otro lado, en particular los *Elementos,* por su estructuración y de alguna manera por su generalidad estaban llamados a crear la base de una *filosofía de la Matemática*, pero igualmente presentan restricciones para consagrar la Geometría como ciencia universal de la naturaleza o de análisis del pensamiento humano[14]; universalidad propuesta luego por los iniciadores del renacimiento científico y del pensamiento moderno. En consecuencia, el principio de la Geometría griega consiste en encontrar un punto de equilibrio entre la simplicidad de la representación espacial y la claridad del encadenamiento lógico, cuya armonía se establece entre la función de la imaginación y la inteligencia. Igualmente, esta Geometría es un estudio cualitativo de la cantidad y no el estudio cuantitativo de las cualidades que es el principio de la ciencia moderna[15].

14 Brunschvicg, L. (1972, p. 97) nos llama la atención sobre la falta de universalidad de la Geometría de los antiguos, en los comentarios de Proclus (p. 123. Cf. Health, t.I, p. 177) referidos a la naturaleza del ángulo. Euclides presentaba el ángulo como referido a la categoría de la relación, así: “la inclinación de una línea o de una superficie con respecto a otra línea en relación a otra superficie”; Eudemio, lo veía como una calidad: “la afectación de la superficie o del sólido consiste en la rectitud o en la oblicuidad”; para Plutarco, Apolonio o Carpus de Antioquia, era una cantidad, sea superficie o sólido: “comprendida bajo una línea o una superficie pensada alrededor de un punto, midiendo de alguna manera la distancia de las dos partes de esta línea o de esta superficie”. Proclus sintetizaba estas definiciones y se refiere al ángulo, correspondiente a la naturaleza de diversas categorías.

15 Otra de las restricciones de la Geometría antigua es la poca influencia de ésta sobre la Física, cuyas categorías son diferentes a aquellas del matemático. El matemático diseña la configuración de los movimientos, siguiendo las aparien*cias sin estar obli*gado a verificar estas apariencias con la realidad, porque ésta decisión corresponde al físico. El matemático se limita a las hipótesis, los principios *al físic*o. Esta restricción del horizonte matemático es uno de las líneas que marcan mejor el carácter de la ciencia antigua en oposición a la ciencia moderna. Brunschvicg, L. (1972, p. 98-99).

Sin embargo, con la analogía de la lógica formal y de la deducción euclidiana, la introducción en los *Elementos* de teoremas sobre las proporciones, la teoría de números, superficies irracionales y la correspondencia de las relaciones geométricas con las relaciones de orden mecánico o astronómico, se presentan las bases para la concepción de la ciencia universal propuesta luego por Descartes.

Estas restricciones de la Geometría antigua son solventadas en el siglo XVII, en la escuela cartesiana, con la aparición de una lógica universal, llamada a reemplazar la lógica aristotélica de clases y a restablecer el platonismo sobre una base positiva y además porque esta Matemática cartesiana se presenta como siendo esencialmente una Geometría Formal. Con estas bases, se encuentra una tentativa para reorganizar los *Elementos*, siguiendo el verdadero sentido de la Lógica, en los *Nouveaux Éléments de Géométrie*, (*Nuevos Elementos de Geometría)* publicados en 1667 por Antoine Arnauld, quien critica el orden seguido en los *Elementos*, y se sirve de extractos del *Discours de la Méthode (1637)* (*Discurso del Método*) y de los *Regulae (1628)(Reglas para la Dirección del Espíritu)* de Descartes, porque encuentra que la revolución cartesiana es consecuencia de las restricciones de la Geometría elemental de Euclides.

Así mismo, los estudios realizados por los geómetras (H. Poincaré, D. Hilbert, F. Enriques), al final del siglo XIX sobre los principios de la Geometría y la construcción de las geometrías no-euclidianas condujeron al *análisis lógico de la geometría euclidiana* y a la enumeración de los postulados sobre los cuales ella se basa. (Godeaux, 1947, 112-115).

David Hilbert en sus *Fundamentos de la Geometría (Fondements de la Géométrie, 1971, Introduction)* nos llama la atención sobre cómo la Aritmética y la Geometría no exigen para su elaboración sino un pequeño número de proposiciones fundamentales simples, de manera que desde Euclides, el establecimiento de estos axiomas y de sus relaciones han sido el objeto de trabajos numerosos y excelentes, siendo este trabajo el del análisis de nuestra intuición del espacio. Hilbert, va a plantear sus fundamentos a partir de los axiomas de la Geometría euclidiana y los clasifica en cinco grupos correspondientes a las nociones de *asociación, distribución, paralelismo, igualdad y continuidad*.

Anotaciones históricas

Las actividades de Euclides estaban ligadas a las del Museo de Alejandría, donde se formaron sus alumnos y realizaron una verdadera escuela. Sabemos que, en el siglo III a.C., las ciudades griegas habían perdido su autonomía, después de la conquista de Grecia por Filipo de Macedonia; luego su hijo Alejandro formó un imperio en donde Alejandría era su capital, convirtiéndose en un centro cultural, cuyo Museo (700.000 volúmenes) tuvo gran reconocimiento. Entre las disciplinas estudiadas en éste, tenían una gran predominancia las Matemáticas, éstas empiezan con una sistematización de los conocimientos existentes, basada en la síntesis realizada por Euclides, en sus *Elementos* y en la presentación de Apolonio de una *teoría global de las secciones cónicas*.

Igualmente, Arquímedes (nacido en Siracusa hacia 287 a. C.), es ejemplo del espíritu alejandrino, busca el rigor y la aplicación justa, es un inventor genial y popular, se dedica a las construcciones mecánicas sutiles y precisas (bombas de agua, máquinas de guerra), utiliza las propiedades de los espejos parabólicos para hacer converger los rayos del sol sobre las naves romanas que estaban en Siracusa e incendió la flota de navieros. Por sus estudios sobre la espiral abre las investigaciones de las curvas transcendentes, que habían sido dejadas de lado por el interés exclusivo en curvas construidas por medio de la regla y el compás. Sus trabajos sobre las áreas y volúmenes constituyeron el apogeo de la Geometría alejandrina, de manera que Euclides, Apolonio y Arquímedes llevaron a la Geometría griega a la cima de su avance con respecto a los métodos antiguos. Así mismo, Nicomedes (siglo II a. C.) inventa la *concoide* (fig. 15) y Diocles (fin siglo II a. C.) inventa la *cisoide*, con el fin de encontrar dos medias proporcionales. Zenodoro inaugura el estudio de un nuevo objeto geométrico considerando figuras con el mismo perímetro (*isoperímetros*).

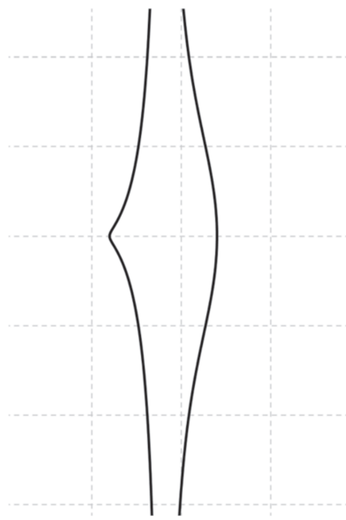


Figura 15.

De la misma manera, las aplicaciones de la Geometría clásica giran hacia aplicaciones, como la astronomía, así el enunciado geométrico de la *esfericidad* de los cielos y el descubrimiento de ésta en la tierra reclaman una herramienta adecuada, que sería la *trigonometría esférica* de Hiparco (II siglo a. C.). La autonomía de la Aritmética y el Algebra de la Geometría se desarrolla paulatinamente en Alejandría, lo que se ve en los trabajos de Herón, Nicómaco de Gérase y Diofante con su libro las *Aritméticas*.

Igualmente, se presentan comentaristas eruditos que remplazan a los inventores, así Herón de Alejandría, comenta los *Elementos* y utiliza los resultados de Arquímedes para demostrar nuevos teoremas de la Geometría euclidiana, utiliza también procedimientos de los Egipcios, cuyas investigaciones se orientan hacia la práctica. Pappus (300 d. C.) es uno de los más brillantes, con su *Colección Matemática* nos hace llegar muchos de los textos clásicos, presenta el *Problema de Pappus*, retomado en el siglo XVII por Descartes y luego por otros matemáticos. Proclus analiza el Libro I de los

Elementos, Hipatia está al origen de una reedición de éstos *Elementos* (siglo IV d. C.), ella es miembro de la escuela neoplatónica fundada en Alejandría a mitad del siglo III d. C., es opuesta al cristianismo y víctima de los fanáticos cristianos, su muerte simboliza el final de la escuela de Alejandría.

2.2.6. Apolonio y las secciones cónicas

Introducción

Apolonio nacido en Perge (actual Turquía, 262 a. C. - 190 a. C.), gran centro cultural, se educa en Alejandría, sigue las investigaciones de Euclides y para completar sus conocimientos va a la Universidad de Pérgamo. Sus trabajos le valen el nombre del *Gran Geómetra*, por sus contemporáneos griegos.

El estudio de las secciones cónicas en Grecia remonta al siglo V a.C. Hipócrates de Chios (470-410 a. C.)[16] se interesa en el problema de la duplicación de un cubo[17], el cual puede plantearse de la manera siguiente: Si a (arista) designa el lado del cubo inicial, se trata de construir un segmento de medida x tal que: $x^3= 2a^3$, es decir $x = \sqrt[3]{2}\, a$ (fig. 16).

16 A Hipócrates de Chios se le atribuye la paternidad del *razonamiento por el absurdo*, una de las bases de la lógica que permite demostrar la verdad de una proposición al probar que su contrario es absurdo. El escribe la primera obra sobre los *Elementos de Geometría*, conocida un siglo antes de la obra de Euclides y actualmente es conocida por las referencias hechas en las obras de comentaristas más recientes (Proclus y Simplicius de CIlicie).

17 Este problema fue presentado por los sofistas griegos en el siglo VI a. C., e interesa a numerosos matemáticos como Hippias d'Elis, Architas de Tarente, Eudoxe de Cnide, Helicon de Cyzique, Eutocios d'Ascalón. En su origen, tomado como una leyenda referida por Eratóstenes en el *Platonicien* y por Theon de Smyme en su Aritmética. Se llama también el *problema de Delos*, porque se trataba de construir un altar en honor de Apolo. El altar, de base cúbica, debía ser dos veces más grande en volumen del altar que existía en la ciudad, esto con el fin de erradicar, por mandato del oráculo, la epidemia de peste que sufría la ciudad en esa época. Pero, las soluciones presentadas doblaron la longitud de los lados del cubo y no resolvieron el problema porque multiplicaron

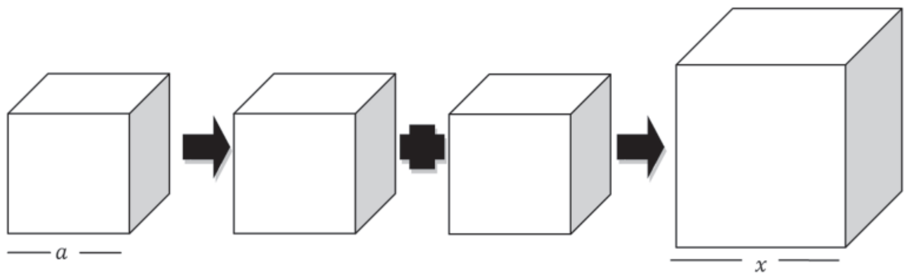


Figura 16.

Para resolver el problema, Hipócrates se propone encontrar dos *medias proporcionales*, en proporción continua, por medio de dos rectas en la que la más grande es el doble de la más pequeña, para obtener la duplicación del cubo. De esta manera redujo analíticamente, este problema geométrico, a aquel de la construcción de dos *medias proporcionales* que se encuentran entre la arista del cubo (a) y un segmento doble (x o $2a$), retornando así, la dificultad de la duplicación del cubo en otra dificultad, no menor que la primera.

Este proceso realizado por Hipócrates es uno de los primeros ejemplos de análisis (Gardies, 2001, p.58), que se puede calificar dentro de la línea de los pitagóricos, si suponemos a y b siendo números enteros, se tendría como medias proporcionales:

el volumen del altar por ocho. La peste continuó mucho más fuerte y los de Delos buscaron a Platón que les declara la importancia de la reflexión en Matemáticas y Geometría. El problema de la duplicación del cubo, junto con la cuadratura del círculo y la trisección del ángulo fueron estudiados por los griegos de la antigüedad como construcciones geométricas, con solo instrumentos como la regla no graduada y un compás. Igualmente la Geometría griega consideraba la recta y el círculo como las figuras fundamentales que validaban los problemas de construcción geométrica. Si los tres problemas enunciados se volvieron célebres, fue justamente porque todas las tentativas de resolución fueron vanas. D'Alembert escribió en 1760 que, ninguna solución plana no fue encontrada con la sola utilización de la regla y el compás, pero la imposibilidad de tal construcción no se probó sino hasta el siglo XIX, (1837) por Pierre-Laurent Wantzel que establece un teorema, utilizando ecuaciones algebraicas aplicadas a problemas solubles con la regla y el compás. Demuestra que $\sqrt[3]{2}$ no se puede construir y la duplicación del cubo es imposible realizarla por medios geométricos.

$$\frac{a^3}{a^2b} \qquad \frac{a^2b}{ab^2} \qquad \frac{ab^2}{b^3}$$

Lo que nos lleva a decir que: entre dos números cúbicos existen dos números medios en proporción continua, y que entre dos números cuadrados no existe sino uno (objeto de las proposiciones 11 y 12 del libro VIII de los *Elementos* y de la proposición 33 del libro IX de los *Elementos*: "*los paralelepípedos semejantes son, los unos a los otros, en razón triple de sus lados homólogos*").

Así mismo, se sabe que la primera de estas dos expresiones es verdadera solamente si la segunda lo es también, lo que parece indicar que Hipócrates de Chios lo sabía o al menos lo intuía.

Posteriormente, *Ménechme* (375-325 a.C.), alumno de Eudoxio, contemporáneo de Platón, preceptor con Aristóteles de Alejandro el Grande, es el autor de importantes trabajos sobre las *cónicas* (llamadas *curvas de Ménechme*) que las define como la intersección de un plano y de un cono (secciones cónicas) en relación con el problema de la *duplicación del cubo*. Consecuentemente, él reduce analíticamente la construcción de las dos medias proporcionales a un problema de la intersección de dos de las secciones cónicas (que él mismo pasa por ser el inventor). Se puede decir que hay una *modernización* y una gran *simplicidad* en la propuesta de Ménechme.

Si se supone las medias proporcionales buscadas x y y entre dos segmentos dados a y b, se obtiene la conjunción siguiente de proporciones:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \;\&\; \frac{x}{y} = \frac{y}{b} \;\&\; \frac{a}{x} = \frac{y}{b}$$

en donde la tercera proporción se deduce de las dos primeras en virtud de la proposición V-11 de los *Elementos,* que dice: *"las razones que son las mismas que una misma razón también son las mismas la una que la otra".*

En vocabulario moderno, se diría que estas proporciones corresponden a las funciones:

$$ay = x^2 \;\&\; y^2 = bx \;\;\&\;\; xy = ab$$

Donde las dos primeras proporciones pertenecen a las dos parábolas y la última a la intersección de una parábola y una hipérbola, aquí Menechme se muestra capaz de distinguir en las proporciones correspondientes, las propiedades respectivas a:

1) Una parábola alrededor de aquello que se llamaría hoy el eje de las x (fig. 17).

2) Otra parábola alrededor del eje de la y (fig. 18).

3) Una hipérbola (fig. 19).

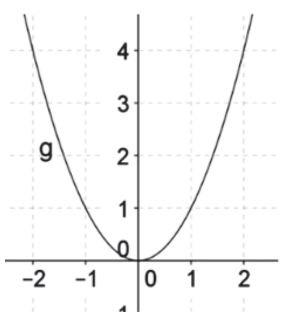


Figura 17.

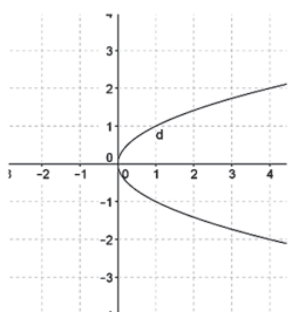


Figura 18.

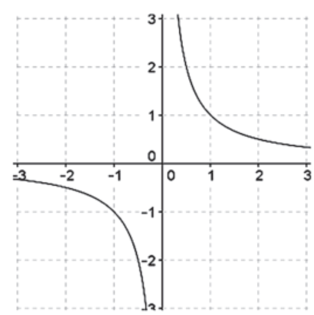


Figura 19.

La intersección de dos de estas secciones cónicas son suficientes para determinar el punto a partir del cual la elevación de las perpendiculares sobre los dos ejes darían el segmento x y el segmento y (fig. 20). Así, en el marco de la teoría de las proporciones de Eudoxio, se puede escoger como unidad ($a = 1$), con lo cual el problema se identifica a la búsqueda de esas medias proporcionales x y y, tales que:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2}$$

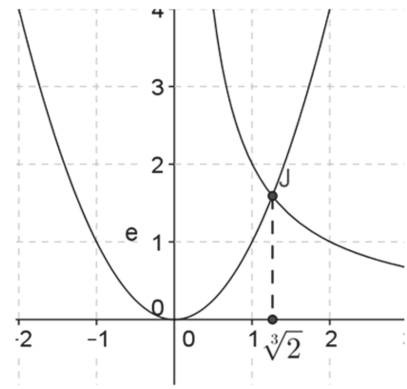


Figura 20.

En términos modernos, Ménechme considera, entonces, la intersección de dos cónicas: la hipérbola con la ecuación: $y = \frac{2}{x}$ y la parábola con la ecuación $y = x^2$. La abscisa de la intersección es entonces igual a $\sqrt[3]{2}$. Igualmente, Ménechme hubiera razonado por analogía con el círculo descrito como lugar geométrico, según T. L. Health (Dahan-Dolmedico, A – Peiffer, J., 1986, p. 64, 65), de manera que como se muestra en la figura 21, desde un punto M de coordenadas (x, y), donde $y^2 = x(d - x)$, (d es el diámetro) representaría, entonces, un lugar geométrico, y es en este momento que él introdujo el cono.

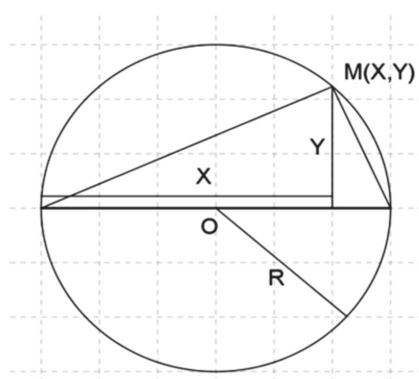


Figura 21.

El problema, así llevado al plano, introduce herramientas más formalizadas pero no resuelve el problema en el sentido estricto de la construcción euclidiana o puramente geométrico (se sabe que no hay solución en este sentido) y el método de Ménechme y muchos otros son aproximaciones de la solución constructiva euclidiana.

Anotaciones epistemológicas

Se tienen así, tres maneras de construir las dos medias proporcionales a partir de las secciones cónicas[18]. Ménechme, según Eutocius, distinguió en su procedimiento dos momentos, aquel del *análisis y la síntesis*[19]. En consecuencia, la equivalencia entre la duplicación del cubo y la construcción de dos medias proporcionales, lleva a una equivalencia entre la construcción de dos medias proporcionales y la determinación de una intersección de secciones cónicas. El *análisis* no tiene sentido, en este segundo caso, porque se supone que se conocen las propiedades de las secciones cónicas a las cuales se reduce el problema dado. El texto transmitido por Eutocius deja entender que Ménechme procedió de manera natural en su invención de la solución, para lo cual él debía presuponer las propiedades fundamentales de las secciones cónicas.

Evidentemente esta presentación del *análisis*, lleva directamente a la *síntesis*, es decir a la construcción de las dos secciones cónicas y sus intersecciones que determinan los segmentos de valores x y y, con sus respectivas demostraciones.

18 El texto trasmitido por Eutocius no da sino dos, aquella que se obtiene por intersección de las dos parábolas, aquella que se obtiene por intersección de una de las parábolas con la hipérbola, sin probar la necesidad de mostrar la intersección con la *otra* parábola (Gardies, 2001, p.60).

19 El libro VII de la Colección Matemática de Pappus se refiere al *Análisis* como la vía que parte de aquello que se busca, según unos lineamientos acordados (abriendo por “que sea así”); para llegar consecuentemente a aquello buscado por medio de la *Síntesis* (que comienza por: “la síntesis procederá entonces como sigue”). En el *Análisis*, se supone aquello que se busca como ya obtenido, se examina aquello que puede despejar ciertas premisas, hasta remontar así a alguna “cosa” ya conocida o que sea función de principio (Gardies, 2001, p.13).

A su vez, Ménechme distingue tres clases de cónicas según la intersección de un cono de ángulo ô y de un plano perpendicular a una generadora[20], intersección que producía curvas diferentes según que el ángulo en la cima del cono sea agudo, recto u obtuso. De manera general, la sección de un cono para el ángulo agudo se nomina *elipse* (griego ελλιπσισ, deficiente, defectuoso, que en términos modernos se debe a su grado de *excentricidad*[21], para cada tipo de cónica; sección del cono por ángulo recto, nominado *parábola* (del griego parabole:al lado o alegórico); y la sección del

20 Generadoras (fig. 22) es el conjunto de rectas, trazadas según la forma de la curva plana y de la posición de la cima del cono, de manera que una superficie cónica se genera a partir de una recta D que pasa por un punto fijo C que representa la cima del cono y que se desplaza alrededor de una curva plana G, por ejemplo.

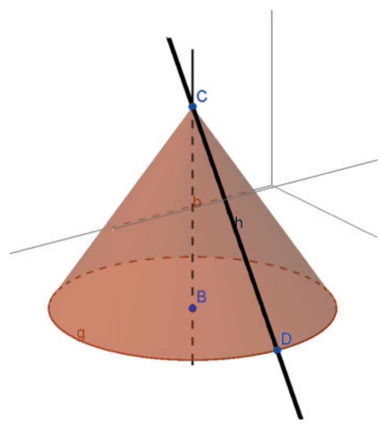


Figura 22.

21] Excentricidad (fig. 23) en Geometría y Matemáticas es un parámetro que determina el grado de desviación de una sección cónica con respecto a una circunferencia. Para cualquier punto perteneciente a una sección cónica, la razón de su distancia a un punto fijo *F* (foco) y a una recta fija *l* (Directriz) es siempre igual a esta constante positiva: excentricidad e. La excentricidad de las Secciones Cónicas es la siguiente: La excentricidad de una circunferencia *(e= 0)*; la excentricidad de una elipse es mayor que cero y menor que uno *(0 < e < 1)*; la excentricidad de una parábola es uno *(e= 1)*; la excentricidad de una hipérbola es mayor que uno *(e < 1)*. Donde el punto *F* es un foco y el punto *H* designa la proyección ortogonal del punto *M* sobre la recta *D*.

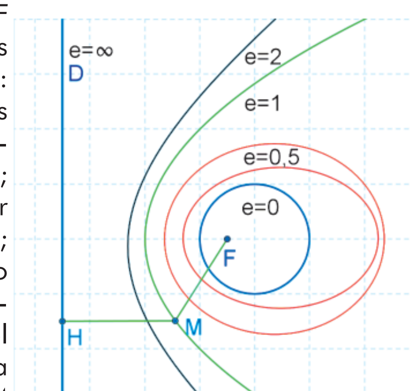


Figura 23.

cono por ángulo obtuso, nominada *hipérbola* (del griego $\eta\psi\pi\epsilon\rho\beta\alpha\lambda\lambda\epsilon\iota\nu$: exceder). De manera que, la elipsis aparece como la antinomia de la hipérbola[22].

Después de Ménechme, Aristides (segunda mitad del siglo IV a. C.), se interesa en las cónicas en su obra *Des lieux solides* (Los Lugares Sólidos), cuyos lugares no son otra cosa que las cónicas. Los predecesores de Apolonio, comprendidos Arquímedes y Euclides utilizan la terminología presentada por Arístides.

Apolonio

La innovación de Apolonio es la de generalizar los tres casos de las cónicas, engendrando éstas a partir de la intersección de un mismo cono oblicuo con base circular, por un plano de corte que puede variar su dirección.

De manera más moderna (fig. 24) se pueden mostrar las cónicas, de la siguiente forma:

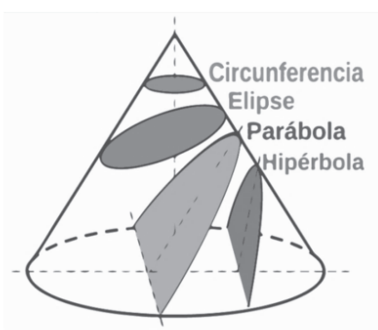


Figura 24.

Según si el plano secante encuentra todas las *generadoras* sobre una misma parte del cono (es una elipse) o es paralela a una de las generadoras (es una parábola) o encuentra las dos partes del cono

22 Llama la atención la relación con el aspecto literario, así: elipse designa una sintaxis que omite una palabra o un verbo; hipérbola un estilo enfático, excesivo; parábola expresa una manera alegórica.

(es una hipérbola), estableciendo así, las características de las secciones cónicas. En lenguaje moderno, quiere decir que expresa su ecuación en el sistema de coordenadas teniendo como ejes un diámetro de la curva y la tangente a una de las extremidades del diámetro, así las propiedades características de las cónicas se expresan por las siguientes ecuaciones:

1) $y^2 = px$ *(parábola)*
2) $y^2 = x\,(p - \frac{p}{a}\,x)$ *(elipse)*
3) $y^2 = x\,(p + \frac{p}{a}\,x)$ *(hipérbola)*

donde a es la longitud del diámetro y p la del lado recto. Este enfoque le permite construir las tres curvas con la ayuda de la aplicación del concepto de *igualdad de áreas*.

Para un mayor entendimiento de este razonamiento a continuación se exponen las construcciones de las ecuaciones de la parábola y elipse, ecuaciones 1) y 2) respectivamente.

Para la construcción de la ecuación de la parábola (fig. 25) se supone una parábola, se toma un segmento de recta AE de longitud

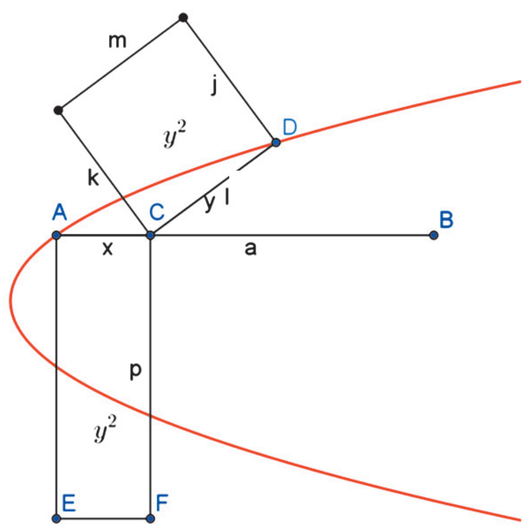


Figura 25.

p, donde A es un punto sobre la parábola, con el lado AE se forma un rectángulo, donde el otro lado es AC de longitud x, se toma otro segmento de recta CD, donde D es un punto sobre la parábola, de longitud y, se forma un cuadrado de lado CD de área y^2, los puntos de la parábola son los puntos x, y que hacen que las áreas del rectángulo y del cuadrado formados anteriormente sean iguales, es decir $y^2 = px$.

Si el rectángulo de lados x y p, de área y^2 tiene una base muy corta, él debe ser completado por un rectángulo de lados x, $\frac{p}{a}x$, y en este caso la curva será una *elipse* (fig. 26).

Para la construcción de la ecuación de la elipse, se toma la construcción que se hace en el teorema fundamental del primer libro de Apolonio (proposición XIII): se supone una *elipse*, con un diámetro AB de longitud a, un segmento AC tomado sobre el diámetro, de longitud x y una cuerda conjugada CD, de longitud y. La característica de la figura, será la relación constante $\frac{p}{a}$ entre el cuadrado de la cuerda CD, y el producto de los dos segmentos AC y CD del diámetro. El método de Apolonio consiste en representar esta relación, que se traduce en términos algebraicos, para la construcción de una figura auxiliar. A partir de A y C se construyen dos perpendiculares al diámetro y la perpendicular que inicia en termina en E. A AE se le da la longitud p al unir E a B, EB corta en F la perpendicular levantada en C. La semejanza de los dos triángulos AEB, CFB nos da la proporción:

$$\frac{CF}{CB} = \frac{AE}{AB} = \frac{p}{a} \qquad (1)$$

Despejando CF de (1) se tiene:

$$CF = \frac{p}{a} CB \qquad (2)$$

ahora la ecuación

$$CD^{2} = \frac{p}{a} AC \cdot CB \qquad (3)$$

se transforma en la siguiente ecuación después de sustituir la ecuación (2) en la ecuación (3)

$$\mathrm{CD}^2 = \mathrm{AC} \cdot \mathrm{CF} \quad (4)$$

Esta es la expresión que define la ecuación de la *elipse*, de la siguiente manera:

Se ve que la cuerda CD y el segmento AC que está determinado sobre el diámetro son los elementos variables de una relación que es general y se expresa por la equivalencia de las áreas del rectángulo de lados AC, CF y el cuadrado de lado la cuerda CD.

Tomando $\mathrm{CD} = y, \mathrm{AC} = x$ la ecuación (4) toma la forma:

$$y^2 = x \cdot CF \quad (5)$$

Sólo falta determinar CF en términos de p, de a y de x. Sea F' el punto sobre AE paralelo a F, de la semejanza de los triángulos AEB y $F'EF$ se tiene que:

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{F'E}}{\mathrm{F'B}}$$

De donde el lado $F'E$ mide $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}} F'F$ retomando los valores dados a los anteriores lados se tiene:

$$F'E = \frac{p}{a}\, x$$

Como AE mide p y $F'E$ mide $\frac{p}{a}\, x$ y $CF = AE - F'E$ entonces $CF = p - \frac{p}{a}\, x$ (6), sustituyendo (6) en (5) se tiene finalmente que:

$$y^2 = x\left(p - \frac{p}{a}\, x\right)$$

Que es la ecuación de la *Elipse* buscada.

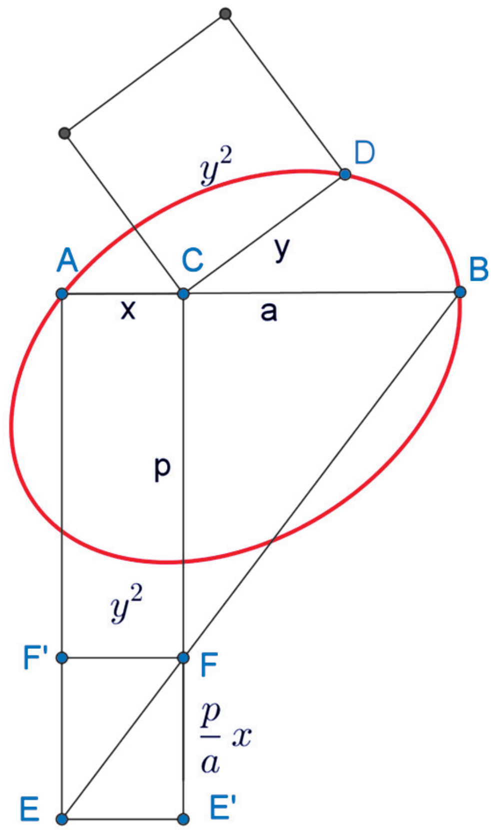


Figura 26.

Si la base del rectángulo sobrepasa la longitud de $\frac{p}{a}\,x$, la curva construida será una *hipérbola*. La construcción de su ecuación es similar al de la elipse con la salvedad anteriormente mencionada, por esta razón se omite su construcción en este texto.

Anotaciones epistemológicas

De esta manera, Apolonio aplica esta relación a la hipérbola y a la parábola. Se puede decir que el trazo de la figura conviene a la representación y a la solución de la ecuación de segundo grado. Los elementos que sirven de punto de partida a esta relación, *cuerda* y *segmento* tomados sobre el diámetro, se les atribuye el rol de coordenadas verdaderas.

Esto con la salvedad que, la relación no se despeja de manera explícita porque la construcción auxiliar, el *rectángulo de referencia*, es parte integrante de la solución; de manera que es necesario un teorema diferente para cada caso particular y las combinaciones múltiples se establecen entre el *medio* y el *objeto* de la representación geométrica, de ahí la complicación y la dificultad de la ciencia de Apolonio, que sería lo que le falta a las matemáticas griegas, es decir formulas propias y no el método como tal (Brunschvicg,1972, p.103, según Paul Tannery: "Bulletin des Sciences Mathématiques, 1885, p. 86).

Después de estas definiciones y la construcción de las cónicas, Apolonio estudia sus propiedades fundamentales (asintóticas, tangentes, diámetros conjugados, etc.)

Contenido de los libros de Apolonio

Su obra fundamental es: *las Cónicas,* compuesta de 8 volúmenes, cuatro que han sobrevivido en griego y siete que se han transmitido por los traductores árabes y el octavo se perdió.

En el Libro I, Apolonio da las definiciones precisas y presenta las propiedades de base de las cónicas como por ejemplo aquellas que unen las cónicas a sus tangentes y aclara los métodos de construcción. Especialmente se le debe la difusión de los nombres de *elipse, parábola e hipérbola.* En esta época, la hipérbola no designa sino una sola parte de la curva, pero al considerar un segundo cono opuesto por la cima, Apolonio concibe la existencia de una segunda parte que llama *hipérbola opuesta.*

El Libro II describe las asíntotas[23] de la hipérbola.

23 La palabra asintótica, se deriva del griego: ἀσύμπτωτος —*asýmptōtos*— "aquello que no cae"; en donde «a» posee un valor privativo (no), mientras que *sym-ptōtos* significa aquello que «cae» o «cae junto a algo». La asíntota de una curva, significa que «no se encuentran nunca», presentada por Apolonio

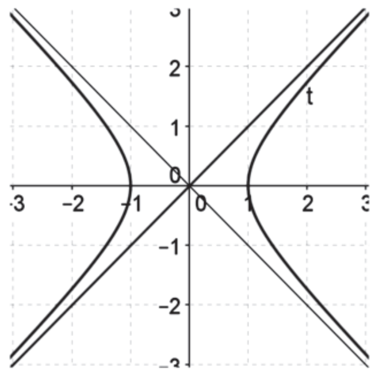


Figura 27.

La figura 27 muestra una Hipérbola con sus asíntotas

Los últimos libros de Apolonio tratan de estudios más precisos como el estudio de las *normales*.

En su obra ´*Επταφαί*, «Las Tangentes» (dos libros), Apolonio sigue los trabajos de Euclides (Libro III de los *Elementos)* que describen la construcción de un circulo tangente a tres rectas dadas y explica más generalmente, cómo construir una cónica tangente a tres objetos geométricos dados (fig. 28). Los objetos pueden ser puntos, rectas o círculos.

en su tratado sobre las secciones cónicas, para referirse a una recta que no interseca a una hoja de la hipérbola. Esta impresión se refuerza por ciertos usos literarios del término: "la ciencia es asintótica de la verdad. Ella se aproxima siempre pero no la toca jamás" - (Victor Hugo. William Shakespeare - *L'art et la science*).

En Geometría el comportamiento asintótico se refiere a una eventual propiedad entre curvas, y más precisamente, entre funciones o partes de funciones: segmentos de recta, hojas de hipérbola o de parábola, etc., que tienden al infinito. En ciertas investigaciones, el estudio del comportamiento asintótico, se desarrolla particularmente en los estudios de funciones. En el dominio científico, se estudian funciones que dependen del tiempo (evolución de poblaciones, reacción química o nuclear, ...), uno de los objetivos de estas investigaciones es el de conocer el estado al final de la experiencia, es decir cuando un intervalo de tiempo ha pasado, es determinar el comportamiento estable, al infinito, del fenómeno que se mide.

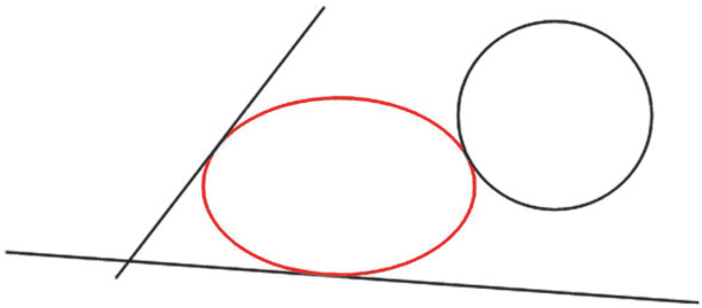


Figura 28.

Apolonio se interesa igualmente en la búsqueda de lugares geométricos como aquel que conduce a un círculo, llamado el *Círculo de Apolonio*.

Otro teorema conocido de Apolonio es el *Teorema de la Mediana* (fig. 29), así: en un triángulo ABC, si M designa el medio de [BC], entonces:

$$AB^2 + AC^2 = 2\,(BM^2 + MA^2)$$

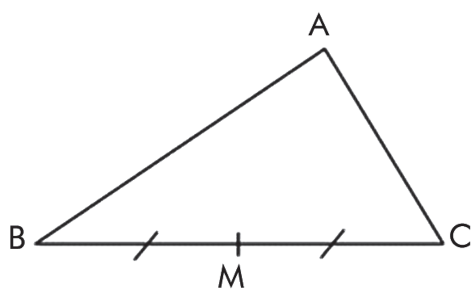


Figura 29.

Así mismo, aplica numerosos descubrimientos geométricos, donde sus trabajos sobre las cónicas lo conducen a estudiar las propiedades de los espejos parabólicos (fig. 30), demuestra que sobre ese espejo, los rayos del sol, todos paralelos, se reflejan y convergen en un punto único llamado "foco" (fenómeno utilizado por Arquímedes).

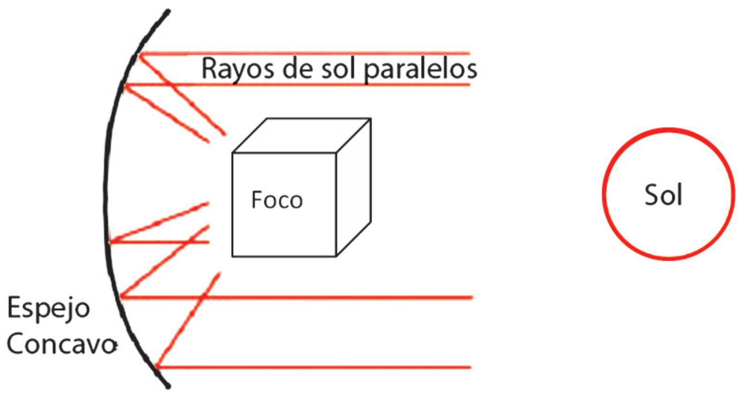


Figura 30.

Anotaciones históricas

La obra de Apolonio no termina en los trabajos de Geometría, Pappus de Alejandría (IV d.C.) y Proclus (412-485) se refieren a algunas de las investigaciones sobre los *números*, trabajó también sobre la multiplicación, los números irracionales y propuso un sistema de numeración para los números grandes. Sus trabajos sobre el número π lo llevan a una aproximación mejor que aquella obtenida por Arquímedes de Siracusa (287- 212 a.C.).

Él estudia también en Astronomía, el movimiento de los planetas (en particular la luna) y presenta un modelo que consiste en colocar la tierra en el centro. Este modelo geocéntrico, aunque inexacto, será retomado y completado por Hiparco de Nicea (190-120 a.C.) y Tolomeo (90 -160?)

Anotaciones epistemológicas

El problema de Apolonio ha impulsado varias investigaciones adicionales, notablemente, las generalizaciones en tres dimensiones −la construcción de una esfera tangente a cuatro esferas dadas− y en dimensiones superiores. La disposición de tres circunferencias tangentes entre ellas ha recibido una atención especial.

En su época, René Descartes presentó una fórmula que relaciona los radios de las circunferencias dadas y los de las circunferencias resolutorias, que se conoce actualmente como el *teorema de Descartes*. La resolución iterativa del problema de Apolonio lleva a la formación de uno de los primeros fractales descubiertos y dibujados, el *tamiz de Apolonio* (fig. 31), importante en *teoría de números*; su aplicación principal es determinar una posición a partir de las diferencias entre las distancias de, al menos, tres puntos conocidos mediante la *trilateración hiperbólica,* utilizada en navegación y en sistemas globales de navegación por satélite como el GPS.

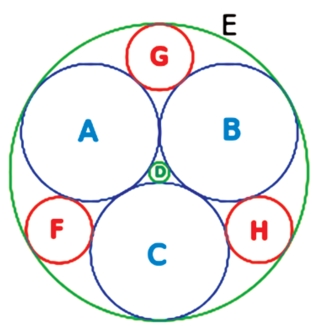


Figura 31.

2.2.7. Las contribuciones árabes

Estas se enmarcan dentro de la Geometría griega. A principios del siglo IX, las obras griegas son traducidas al árabe y las síntesis y resúmenes permitieron que fueran asimiladas por los árabes y se aplicaron a sus conocimientos. Los estudios son frecuentemente críticos debido, entre otros, a la forma particular del *Quinto Postulado* de Euclides (paralelas), su asignación como teorema después de Tolomeo y por varios siglos, las innumerables tentativas de demostración.

Este trabajo crítico condujo a los árabes a desarrollar métodos de cálculo de áreas y volúmenes utilizando el procedimiento griego de la “exhaución”[24]. El libro de los cálculos de las figuras planas y esféricas de los hermanos Banu Musa (siglo IX), ejerció una gran influencia sobre la evolución de la Geometría en Bagdad (que llega por una traducción latina de Gérard de Crémone bajo el título *Libertrium fratum de geometria*), contiene un conjunto de proposiciones sobre el área del círculo, cuyo valor de la relación de la circunferencia al diámetro, se sitúa entre $3\frac{10}{71}$ y $3\frac{1}{7}$.

Thabit ibn Qurra (836-901), discípulo de los hermanos Banu Musa, familiarizado con las obras de Arquímedes, Euclides y Apolonio, calcula el área de un segmento de parábola que hace la suma de las áreas de los trapecios inscritos y considera los cuerpos de revolución

24 El descubrimiento de la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado lleva a otras magnitudes inconmensurables, sin embargo la teoría de las proporciones de Eudoxio (418 a. C.) presentada en los *Elementos de Euclides*, es una tentativa de darle un estatuto a estas magnitudes. Ella está en la base del método de “exhaución”, que es un procedimiento antiguo de cálculo de áreas, de volúmenes y de longitudes geométricas complejas, que permitirá a los griegos resolver los problemas que hacen parte del cálculo infinitesimal, cálculo de curvas, de áreas o de volúmenes delimitados por curvas o superficies de curvas, determinación de centros de gravedad, construcción de tangentes, etc. Este método se basa, entre otros, en un axioma de medida, el axioma de Arquímedes. En términos modernos el axioma será: “Si a y b son números reales positivos, $a > b$, entonces existe siempre un numero natural m tal que $mb > a$”. Medir para los griegos es muy importante, pero son incapaces de encontrar una unidad de medida común a las magnitudes inconmensurables, no miden las magnitudes geométricas, las comparan entre ellas y calculan sus relaciones. Así, calcular la medida del área de una superficie es un problema claro para los griegos, pero definir la relación de dos áreas es un problema no todavía posible de ser resuelto en el marco de sus matemáticas. De esta manera el método de “exhaución” desarrollado por Eudoxio, Euclides y Arquímedes permiten comparar el área de una superficie A (de un segmento de parábola, por ejemplo) al área de una superficie S conocida (de un cuadrado o un triángulo, por ejemplo). Así, el método consiste en construir dos superficies U y V enmarcando a la vez la superficie que se busca, de manera que se pueda determinar el área A y la superficie S dada, definiendo la diferencia V-U que sea lo más pequeña posible, se demuestra enseguida por el absurdo que A es igual a S (Dahan-Dalmedico, A./Peiffer, J., 1986, p. 170-172).

que se engendran por la rotación de segmentos de parábola y calcula el volumen.

Los geómetras árabes desarrollaron la Geometría de la esfera para las necesidades de la Astronomía, pero con aproximaciones no muy rigurosas; Al-Karaji[25] identifica el volumen de la esfera a la del paralelepípedo recto cuya base es un cuadrado de lado igual al cuarto de la circunferencia del gran círculo $\pi\frac{d}{4}$, con $\pi = \frac{22}{7}$ y cuya altura es igual al diámetro d, aunque Arquímedes había demostrado la formula exacta gracias al método de "exhaución".

Las necesidades prácticas de la construcción, de la arquitectura y de la técnica obligaban a los geómetras árabes a buscar una simplificación de los métodos de construcción, debido a que sobre el terreno se dificulta trazar círculos de radios diferentes y para ello trataron de efectuar las construcciones guardando la apertura del compás constante.

Abu-l'Wafa, en su obra consagrada a la geometría aplicada, el *Libro sobre las construcciones geométricas necesarias para el artesano,* trata las construcciones fundamentales (perpendiculares, paralelas, división de una recta, etc.) con la ayuda de una simple regla y un compás de apertura constante. Estas investigaciones se

25 Abū Bakr Muḥammad ibn al-Ḥasan al-Karaŷi (o al-Karjí) (953 – 1029), fue un matemático e ingeniero persa. Vivió y trabajó la mayor parte de su vida en Bagdad, capital científica y comercial del mundo islámico. Sus tres trabajos importantes son conocidos como *Al-Badī fi'l-ḥisāb* ('Maravilla en el cálculo'), *Al-Fajrí fi'l-ŷabr wa'l-muqābala* ('Glorioso en álgebra'), y *Al-Kāfí fi'l-hisāb* ('Suficiente en el Cálculo'). Aunque escribió apoyándose en el trabajo de matemáticos anteriores, es el primero que libera el álgebra de las operaciones geométricas, fruto de la aritmética griega, para sustituirlas por el tipo de operaciones que constituyen la base del álgebra moderna.
En sus trabajos sobre álgebra, dio las reglas de las operaciones aritméticas con polinomios. Se cree que fue el primero en introducir la teoría del cálculo algebraico. Al-Karaji investigó sobre los llamados coeficientes binomiales y el triángulo de Pascal. También hizo uso del método de inducción para probar sus resultados.

volvieron populares en el siglo XVI en Italia, donde fueron retomadas por los matemáticos del renacimiento (Leonardo da Vinci, Tartaglia y Cardan).

Los árabes realizan construcciones aproximativas, los hermanos Banu Musa proceden con la ayuda del círculo y de una regla graduada a la trisección del ángulo, problema equivalente a la resolución de una ecuación de tercer grado, entonces no realizable a la regla y el compás. Se imaginaron un instrumento compuesto de reglas movibles para determinar dos medias proporcionales entre dos dimensiones dadas.

Una parte de la obra de Abu-l'Wafa se consagra a la división de un cuadrado en sumas de varios cuadrados y a una estructuración de un número de cuadrados en un cuadrado único. Muestra igualmente, una construcción de los cinco poliedros semi-regulares, en donde tres construcciones no son exactas. Se puede ver el proceso de la construcción que hace Abu-l'Wafa y su resultado, en los gráficos 1 y 2.

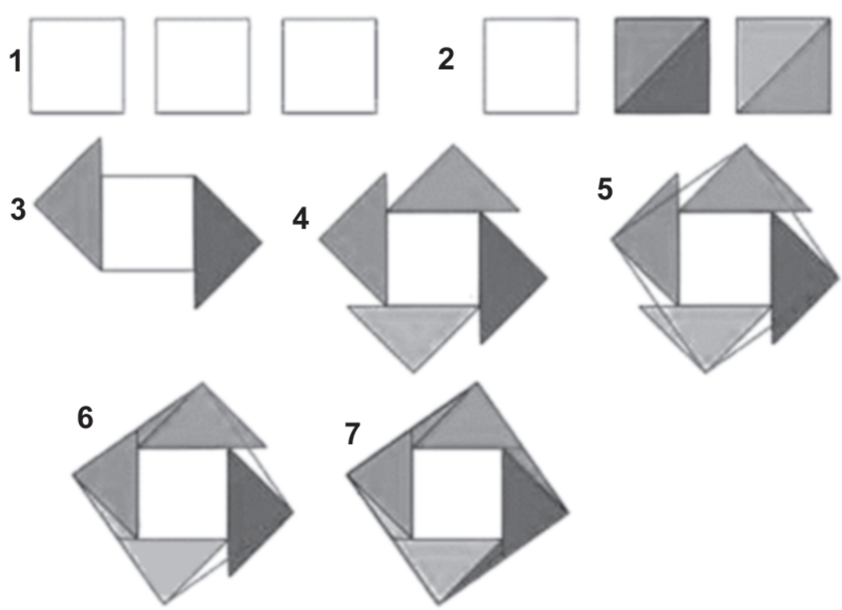


Gráfico 1.

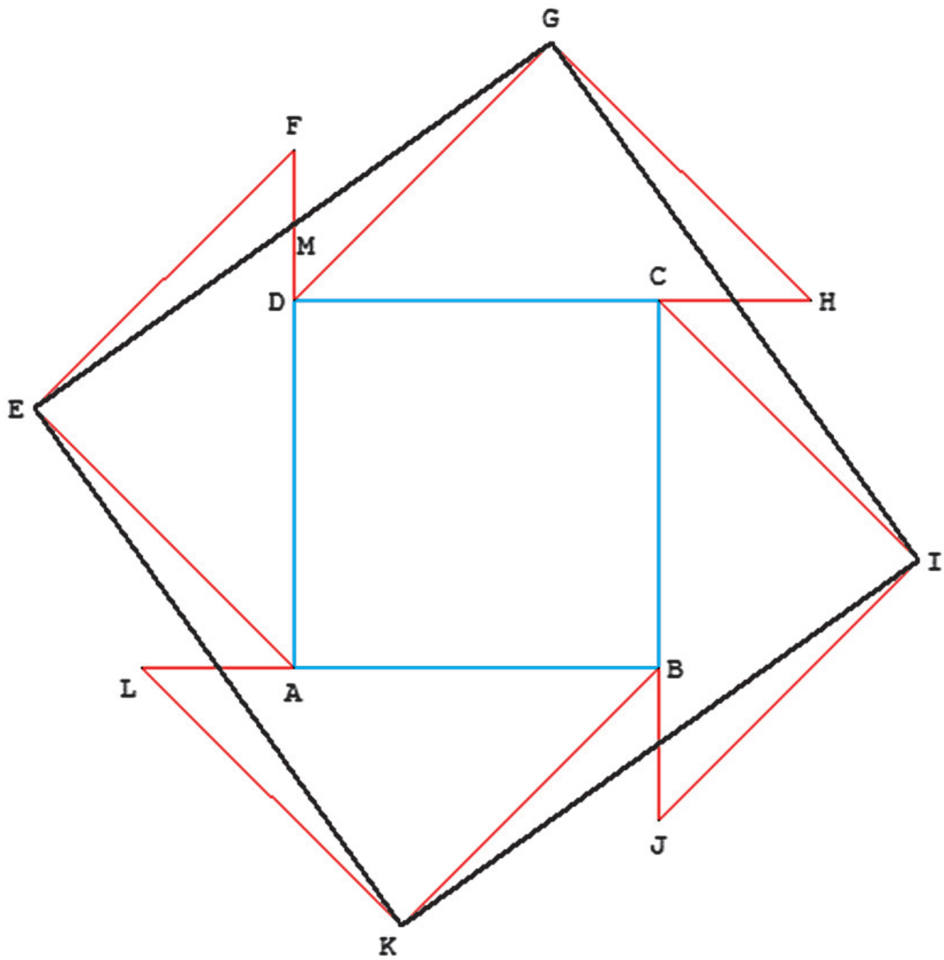


Gráfico 2.

En el periodo entre el año 800 y la mitad del siglo XIII, los sabios árabes se apropiaron de las geometrías griegas y éstas se extienden hasta el renacimiento en occidente, transmitidas por griegos y eruditos bizantinos.

3. La perspectiva y el nacimiento de la geometría proyectiva

El contacto con la filosofía aristotélica y la ciencia griega despierta el interés por la *naturaleza* y sus estructuras, posteriormente los hombres del renacimiento exploran su funcionamiento. Su deseo de conocimiento anima su voluntad de reproducir lo real y de imitar la naturaleza, así, pintar es un acto científico para Leonardo da Vinci, porque le permite revelar la naturaleza real. Desde el siglo XV, los artistas italianos, tratan de representar en un plano figuras del espacio a partir de un punto de vista que constituye el *ojo* y ven en las matemáticas la esencia de la naturaleza, ellos dan las reglas geométricas que permiten traducir la similitud con lo real, éstas son las reglas de la *perspectiva*.

El arquitecto florentino F. Brunelleschi (1377-1446) parece ser el primero en haber inventado estas reglas. Generalmente los practicantes del Renacimiento interpretan el cuadro como una *ventana* a través de la cual la mirada explora el espacio, como una sección plana "transparente" del cono visual, que no es más que el cono formado por los rayos visuales emitidos por el ojo, identificado en un punto que será la cima del cono.

En el siglo XVI aparecen numerosos tratados de perspectiva: Piero della Francesca (1470), Albert Dürer (1525), B. Alberti (1511 a

Nuremberg) presentan la pregunta que desarrolla la Geometría Proyectiva: ¿cuáles son las propiedades geométricas comunes a dos perspectivas de una misma figura? Desde el punto de vista matemático, la idea de la *perspectiva* es la de la *proyección*, que es de interés de los cartógrafos, por los descubrimientos geográficos del siglo XV. La integración de métodos proyectivos en el cuerpo de las matemáticas enriquecerán la Geometría, que tendrá un gran desarrollo con los métodos de las *Secciones Cónicas* de Apolonio y que luego Kepler (1609) va a retomar en la formulación de sus leyes del movimiento de los planetas, que a su vez alimentará la teoría de cónicas y unificará las técnicas geométricas.

3.1. Obra de Gerard Desargues

Desargues es un arquitecto francés de Lyon (1591-1661), ingeniero, familiarizado con las obras de Apolonio, intenta unir la teoría de las cónicas y la perspectiva de los pintores para mejorar las técnicas de los artistas, ingenieros y talladores de piedra formulándolas en términos matemáticos concisos. Su principal obra *Brouillon Project d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan (1639)*:"Borrador Proyecto de una espera de los acontecimientos de los encuentros del cono con un plano". Su obra se sitúa dentro de la *estética barroca* que expresa el gran movimiento de la vida por medio de metáforas de la vegetación. Hace un trabajo de precisión y renovación de vocabularios con el fin de evitar la confusión y la ambigüedad inherentes al uso de los términos del lenguaje corriente (*rollo* en lugar de un sólido cilíndrico o cónico, por ejemplo).

Desargues plantea como definición de principio de las cónicas su generación *como* secciones de un cono por un plano, para lo cual él concibe todas las posiciones posibles, lo que lo lleva a considerar el círculo y un sistema de dos rectas. En este sentido, transfiere a las cónicas las propiedades del círculo que sirve de base al cono; innovación que le permite estudiar con anterioridad las propiedades del círculo y extenderlas con amplitud a las cónicas, que serían como proyecciones del círculo a partir de la cima del cono sobre el plano de corte, sin una demostración nueva de las cónicas. La ventaja de esta concepción proyectiva es que permite reemplazar el estudio separado de cada tipo de cónica por una teoría general valedera para todos los tipos de cónicas. Formaliza así la concepción de Apolo.

Matemáticamente hablando, la *perspectiva* para Desargues, es una *proyección* central (fig. 32) hecha desde un punto 0 (el punto de vista) sobre un plano P dado, el plano de proyección que en todo punto B del espacio hace correspondencia con un punto B', intersección de la recta $0B$ con el plano P.

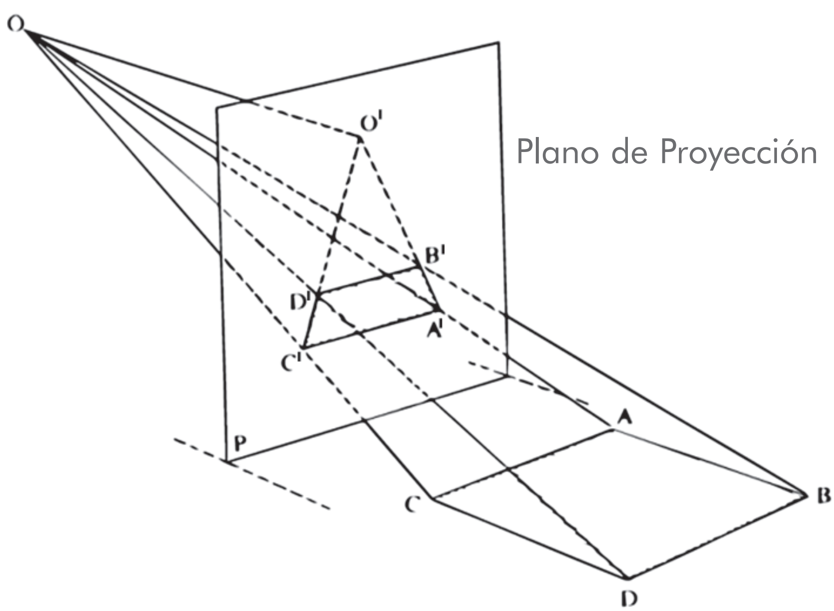


Figura 32.

Anotaciones históricas

La obra de Desargues fue descubierta después de la derrota de Napoleón, un oficial francés restableció las ideas de Desargues y aparecieron nuevos teoremas. Desde ese entonces, su estructura métrica, podía explicar las geometrías no-euclidianas.

3.2. Obra de Alberti, Pascal y de la Hire

Alberti había constatado en su *Della Pintura* que la *perspectiva* transforma un sistema de rectas paralelas en un sistema de rectas concurrentes y con el fin de completar la correspondencia entre los dos sistemas, introduce un punto nuevo sobre cada recta, *el punto al infinito*. Este punto pertenecerá a cada una de las rectas del sistema y por convención es el punto del sistema de rectas paralelas. Rectas concurrentes y paralelas son de la misma naturaleza, salvo que el punto de intersección de las rectas paralelas vaya al infinito y de manera análoga introduce la noción de *recta al infinito.*

Pascal asimila muy rápidamente los nuevos *métodos proyectivos* y entiende el interés y la importancia de éste. Redacta a la edad de 16 años un tratado sobre las cónicas utilizando los procedimientos de Desargues en "*L'essai sur les coniques*" (1640), (*El Ensayo sobre las Cónicas),* presenta el *teorema de Pascal* sobre el *hexagrama místico(figura 33)*, donde esquematiza una demostración por *perspectiva*: los tres puntos de intersección de las parejas de lados opuestos de un hexágono inscrito en un círculo son alineados y se trata de transformar esta figura por proyección central para extender el teorema a todas las cónicas.

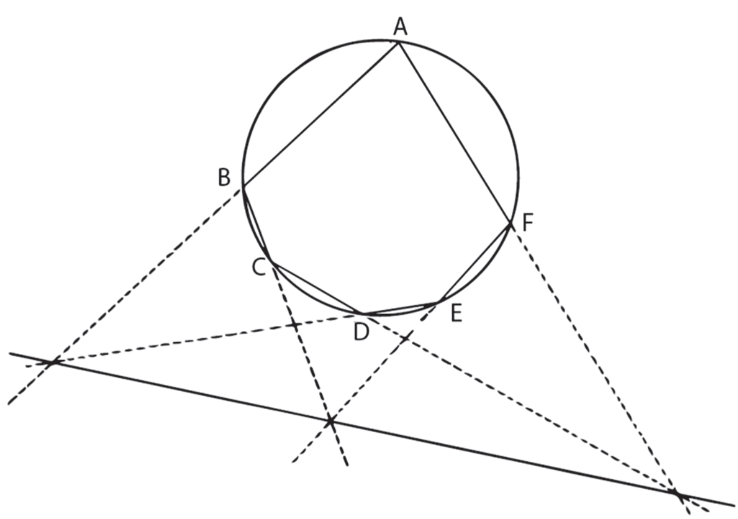


Figura 33.

Si ABCDEF es un hexagrama inscrito en una cónica, entonces los puntos de encuentro de las tres parejas de lados opuestos AB y DE, BC y EF, CD y FA están en línea recta

De la Hire utiliza los métodos proyectivos para presentar, en *Sectiones conicae (1685)* una síntesis completa de las propiedades cónicas de las secciones cónicas y agrega resultados nuevos.

Anotaciones históricas

Después de estos trabajos, los métodos proyectivos se olvidaron durante un siglo, lo que se explica por la eclosión en el siglo XVII de los métodos infinitesimales, que monopolizan el interés de los matemáticos y por la gran popularidad de la Geometría de las coordenadas de René Descartes.

4. Geometría analítica y el estudio de las curvas en el siglo XVII

Esta Geometría se puede ver como el sistema de traducción que permite llevar las preguntas de la Geometría a la solución de ecuaciones algebraicas, el inicio de su desarrollo se presenta en el siglo XVI.

El término de Geometría Analítica, en oposición a la Geometría Sintética, se refiere a los métodos de análisis y síntesis practicados por los geómetras griegos[26]. En las matemáticas griegas, el análisis consiste en establecer las propiedades de un objeto buscado pero al cual se supone su existencia. La situación puede ser reversada si se introduce efectivamente el objeto por medio de sus propiedades

26 Asociar los términos de análisis y analítico, literalmente es obvio. Sin embargo, la separación entre la Geometría Analítica y aquel sobre el Análisis es tan habitual en los programas de Matemáticas, en donde muchas veces no se hace la relación que existe entre estos dos dominios, que recubren la raíz común de sus apelaciones. No obstante, la Historia de las Matemáticas permite al mismo tiempo comprender las relaciones entre la Geometría Analítica y el Análisis y de entender lo que es propio a los diferentes actos del matemático cuando él resuelve un problema geométrico o cuando él resuelve una función en el Análisis Numérico, por ejemplo. (Colloque Inter-IREM : Epistémologie et Histoire des Mathématiques. Analyse & Démarche Analytique. Les Neveux de Descartes. Reims, 10-11 Mai 1995. Actes du 11eme. Colloque Inter-IREM. Édition IREM, 1998).

características, en lugar del planteamiento de la hipótesis de su existencia. Es entonces, la fase de síntesis, que debe realizar la prueba de existencia del objeto.

En este sentido, en la Geometría Analítica, se presenta un método de análisis en el que se plantean las propiedades de un objeto matemático, su representación se puede dar por medio de la ecuación $y = 2x + 1$ o la función $f(x) = 2x + 1$, por ejemplo. Además, se puede representar a través de un sistema de coordenadas, con ejes perpendiculares y graduados: eje de las x y eje de las y. Si $x = 0$, $y = 1$; si $x = 1$, $y = 3$, si $x = -1$, $y = -1$,... Lo que nos lleva a construir una recta. Se tiene, así, una síntesis entre el Algebra y la Geometría, se constituye, entonces, una realidad geométrica por medio del plano de coordenadas y se designa la recta correspondiente como resultado del desarrollo de la ecuación (cantidades variables). De esta manera, se pueden ver varias características de la Geometría Analítica: la expresión de una realidad geométrica por una relación entre cantidades variables, el uso de coordenadas y el principio de la representación gráfica. Sin embargo, si cada uno de estos tres factores se encuentran bastante temprano en el desarrollo de la Geometría, antes del siglo XVI, no habían sido relacionados.

En consecuencia, se puede decir que la Geometría Analítica tiene el objetivo de estudiar los puntos y las rectas (representación gráfica) situadas en un plano de coordenadas y de las transformaciones geométricas que es posible producir, permitiendo así, estudiar las ecuaciones realizadas cuando, por ejemplo, un plano corta una superficie cónica. Igualmente, para la Trigonometría, la Geometría Analítica determina la posición de un punto sobre un círculo en función de su ángulo al centro.

4.1. Orígenes de la Geometría Analítica

De acuerdo a las tres características de esta Geometría, se puede decir que desde la antigüedad, la observación astronómica había llevado a encontrar las direcciones en el espacio por dos coordenadas angulares: *altura* por encima del horizonte y *longitud* con respecto al meridiano que ponen en evidencia relaciones entre esas coordenadas. Pero se trataba de prácticas que no tenían relación con la ciencia geométrica, y al contrario con respecto a la representación por medio de ecuaciones, es en el corazón mismo de la geometría griega que se plantea un cálculo referido a dos variables con el fin de caracterizar las realidades geométricas y el de establecer sus propiedades y no en el campo del cálculo mismo. Así, es en Arquímedes y en Apolonio que este cálculo se desarrolló sistemáticamente para el estudio de las cónicas.

En una perspectiva totalmente diferente, con respecto a la representación gráfica, Nicolas Oresme (1320, Normandia -1382 Lisieux, Francia)[27] en el siglo XIV, imagina esta representación para ciertos fenómenos, como el calor. De manera que va a utilizar una longitud proporcionada a la *longitudo* que constituiría la *abscisa* a un punto dado y una perpendicular a este punto, proporcional a la *latitudo* constituyendo la *ordenada*. Oresme prueba que se podría considerar la propiedad geométrica de una tal figura como correspondiente a la propiedad de la forma en sí; los parámetros de *latitudo* y de *longitudo* podían cambiar o ser constantes. Nicolas Oresme mostró

27 Nicolas Oresme, matemático y astrónomo francés. Estudió Teología en París en 1348. En 1356 era «magister» en el Colegio de Navarra (París) y obtuvo luego el grado de «Magister Theologiae». Canónigo en Ruán y en París, fue Obispo de Lisieux a partir de 1377. Sus contribuciones más importantes en Matemáticas están contenidas en el *Tractatus de Configuratione Qualitatum et Motuum*, que nunca se imprimió. Se tiene un compendio impreso de la obra bajo el título *Tractatus de Latitudinibus Formarum* de Johannes de Sancto Martino (1482, 1486, 1505 y 1515) que ha sido la única fuente de estudio de sus ideas matemáticas. El retoma los escolásticos, que para una cualidad o una forma accidental, como el calor, distinguían entre la *intensio* (el grado de calor en cada punto) y la *extensio* (la longitud de la rama calentada). Estos dos términos fueron reemplazados por aquellos de *latitudo* y de *longitudo* y desde Tomas de Aquino hasta un periodo avanzado del Siglo XIV la pregunta sobre *latitudo formae* (latitud formal) se siguió debatiendo hasta que Nicolas Oresme aclaró el problema.

que esta definición es equivalente a una relación algebraica en la cual figuran las longitudes y las latitudes de tres puntos cualquieras; en otros términos, da la ecuación de la línea recta y la extiende a las figuras de tres dimensiones, precede, de esta manera a Descartes, de tres siglos en la invención de la Geometría Analítica.

Así mismo François Viète[28], al final del siglo XVI unifica el cálculo sobre los números y el cálculo de las magnitudes geométricas a través del cálculo literal. El principio de la reducción al cálculo algebraico se presenta de esta manera y con él un formalismo adaptado a la descripción de las relaciones entre magnitudes geométricas, que va a facilitar el progreso de los geómetras, pero falta todavía una método sistemático para aplicar ese cálculo, que se va a tener con Descartes.

4.2. Desarrollos de la Geometría Analítica

La concepción estructurada de la Geometría Analítica que utiliza el Álgebra como herramienta en la construcción geométrica, se afirma con Pierre de Fermat y René Descartes en los que se encuentra

28 François Viète, o François Viette, en latín Franciscus Vieta, es un matemático francés, nacido en Fontenay-le Comte (Vendée) en 1540 y muere en Paris en 1603. De formación jurídica, fue abogado de grandes familias protestantes, pero paralelamente lleva una carrera de matemático. Él restaura la geometría de los antiguos (Apolonio, Théon, Diofante) y prolonga los trabajos de Albategni, de Rheticus y de Regiomontanus sobre los sinos y los triángulos esféricos. La publicación de su libro *Isagoge Artem Analycitem* o *Isagoge* marca en 1651 el principio de la revolución algebraica que es seguida por Thomas Harriot, William Oughtred, Albert Girard y René Descartes. Él va a fundar las nociones del álgebra contemporánea. Viète es el primer matemático en anotar los parámetros de una ecuación por medio de símbolos. Él funda el Álgebra Nueva o *Logística Especiosa*, una versión homogénea de anotar los cálculos simbólicos. El forma varios alumnos importantes como Marino Ghetaldi, Jean de Beaugrand, Alexander Anderson y corresponsales como Lansberg de Meulabeecke que contribuyeron a prolongar sus métodos y difundirlos en Holanda, Italia y Alemania. Una parte de sus trabajos es consagrado a la Astronomía y es uno de los primeros criptólogos.

una simultaneidad y una cercanía, vecinos en su contenido técnico, pero diferentes en su forma.

A grandes rasgos, puede decirse que mientras Descartes parte de un lugar geométrico para obtener su ecuación, Fermat parte de una ecuación para obtener las propiedades de la curva que representa. Hay que añadir que ambos matemáticos utilizaron fuentes muy antiguas, sobre todo Viète y sistemas de representación de puntos mediante un par de coordenadas, muy anterior a ellos.

4.2.1. Pierre de Fermat[29]

Él presenta las bases de la Geometría Analítica de una manera independiente y diferente a la de Descartes. Se interesa en los grandes clásicos de Alejandría después de 1621 y se propuso reconstruir los dos libros de Apolonio sobre los Lugares planos (*Plane Loci*) a partir de informaciones contenidas en la *Colección Matemática* de Pappus. Este trabajo le condujo al problema de las circunferencias tangentes a tres circunferencias dadas de Apolonio, que generalizó en términos de esferas tangentes a cuatro esferas dadas. Esta primera actividad matemática le llevó en el año de 1629, a la edad de 28 años, a un estudio analítico de los máximos y los mínimos, que aparece como un trabajo precursor del cálculo diferencial[30]. En 1638, la aplicación de este método a la determinación de las tangentes a una curva es considerada como un acto fundador de la Geometría Analítica. Fermat, primero aplica el método a curvas algebraicas, es decir a aquellas cuya ecuación es un polinomio $P(x,y)$, pero luego lo

29 Pierre de Fermat, nace en 1601 en Beaumont-de-Lomagne (Francia) y muere en Castres (Francia) en 1665, es un Magistrado y se consagraba a las Matemáticas en sus momentos de descanso. Él es también poeta, hábil latinista y helenista. Se interesa a las Ciencias y en particular a la Física; es autor notablemente del Principio de Fermat, en Óptica.

30 Uno de los primeros problemas que investigó Fermat en el año 1629 es el relativo al cálculo de máximos y mínimos. Su escrito, titulado *Methodus ad disquiren dan maximan et minimam* (Método para hallar máximos y mínimos), se publicó, después de su fallecimiento, formando parte de su obra matemática, en 1679. En él, aplica un método para hallar los puntos en los

extiende, dos años después, a curvas cualquieras postulando que se puede aproximar un arco de curva por un segmento de la tangente.

De manera general, el punto de partida de Fermat es la observación de la ecuación entre dos variables que se puede considerar como la representación de una curva, si se consideran estas variables como las coordenadas de un punto en un plano. Él descubre, entonces que, toda ecuación de primer grado representa una recta y prueba por medio de ejemplos, que se podía, a la ayuda de transformaciones de coordenadas, determinar la especie de la sección cónica representada por una ecuación de segundo orden.

Su obra "Isagoge ad locos planos et sólidos" (publicada en 1679, pero concebida con anterioridad a la Geometría de Descartes, hacia 1636)[31], es un tratado analítico que concierne la solución de los problemas de planos y sólidos, enunciados de una forma clara, al llegar a la expresión más simple de la correspondencia algebraica y la forma geométrica.

que una función se encuentra representada, por ejemplo, en lo alto de una curva o en lo bajo de ella. Para ello, considera el valor de la función en dos puntos próximos, $f(A)$ y $f(A+E)$ donde A representa a la variable. Si A y $A+E$ son próximos a un máximo o a un mínimo $f(A)$ y $f(A+E)$ son aproximadamente iguales. Así, $f(A) = f(A+E)$, o sea, $f(A+E) - f(A) = 0$ divide esta ecuación por E, sustituye E por cero, resuelve la ecuación resultante en A, y las soluciones son los valores de A correspondientes a un máximo o a un mínimo. Hay, en este método, una intuición del proceso que hoy conocemos como "paso al límite", porque en realidad equivale a calcular el límite; Fermat prima la eficacia del resultado sobre el rigor del método, que es propio de la época. La diferenciación y la integración del método de máximos y mínimos lo aplicó Fermat para determinar la tangente a una curva de ecuación $y^2 = px$.

31 Fermat publicó rara vez sus descubrimientos, apenas algunas notas como apéndices a tratados escritos por otros autores. Como trabajaba para entretenerse, sus resultados más bellos aparecen en los márgenes de estos tratados, y desgraciadamente un gran número de sus trabajos se han perdido. Mantuvo correspondencia con todos los científicos de su época; su reputación de matemático competente fue inmensa, y la estima en la que se le tuvo fue general. Pascal confesó que era «aquél que tengo por el gran geómetra de toda Europa», Contribuyó ampliamente a la evolución de las matemáticas en campos tan variados como la geometría analítica, el cálculo diferencial e

Esta obra, corta, como todos sus ensayos, comienza con una alusión a que en ciertos casos los geómetras antiguos parecen difíciles de comprender a causa de la incapacidad de enunciar el problema de una forma general. Es así como el objetivo de *Isagoge* es realizar un análisis de la teoría de los lugares geométricos con el fin de indicar el camino hacia un estudio general de los problemas de esos lugares geométricos. De esta manera, introduce el principio fundamental de la Geometría Analítica y la idea de una variable algebraica, con el siguiente enunciado, muy significativo en la historia de las Matemáticas: "Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas[32], hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva" (Citado por Dahan-Dalmedico, A. / Peiffer, J., 1986, p. 136).

Más explícitamente, el método de Fermat se funda sobre una correspondencia biyectiva entre los puntos del plano y las parejas de números (x, y) y asocia ecuaciones de función $f(x, y) = 0$ a las curvas.

En la figura 34 el extremo superior de E (actual y) es fijo (B) cuando la longitud de A (actual x) está determinada a partir de un punto 0, que se toma como origen, y hasta el punto C. Así, Fermat utiliza coordenadas oblicuas, aunque el eje de las y no exista explícitamente y aunque no se empleen coordenadas negativas. Estas cantidades desconocidas A y E son verdaderas variables que utiliza en ecuaciones algebraicas representando lugares. Se anota que ni Descartes ni Fermat utilizaron el término «sistema de coordenadas» o la idea de

integral, la teoría de números y la teoría de las probabilidades. Los principales escritos de Pierre Fermat fueron publicados, después de su muerte, por su hijo mayor Clement-Samuel en 1679, bajo el título de *Varia opera mathematica*. Aunque esta publicación no encierra más que una parte de su producción como matemático, basta por sí sola para clasificar a Fermat como uno de los más importante matemáticos franceses del siglo XVI.

32 En la terminología de Viète la cantidad desconocida representaba una magnitud determinada, mientras que según Fermat, el extremo de una de las variables puede ocupar diversas posiciones consecutivas, de manera que represente una línea.

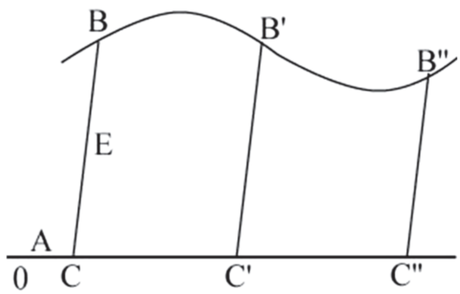


Figura 34.

los dos ejes; Fermat se limitó a hacer representaciones geométricas en el primer cuadrante solamente.

En su presentación introduce la división clásica de los lugares en tres tipos –plano, sólido y lineal– de la manera que se muestra en la figura 35: si el extremo superior de E describe una línea recta o una circunferencia, tenemos un lugar plano; si describe una parábola, una hipérbola o una elipse, es un lugar sólido; para todas las demás curvas, el lugar correspondiente es un lugar lineal (*locus linearis*). Según Fermat, las ecuaciones pueden visualizarse fácilmente cuando las dos cantidades desconocidas son tales, que forman un ángulo dado, el cual ordinariamente es recto.

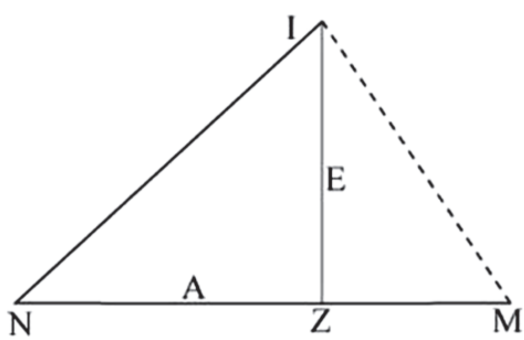


Figura 35.

Fermat introduce el estudio de la ecuación lineal utilizando las vocales (E y A) para representar, como lo había hecho Viète, las cantidades desconocidas. Partiendo de una recta NZM donde N es fijo, toma

NZ como la cantidad desconocida A y el segmento ZI, aplicado sobre la recta con un ángulo NZI, como igual a la otra cantidad desconocida E. Cuando $DA = BE$ donde D y B son constantes, el punto I describirá un lugar geométrico representado por la semi-recta NI.

La ecuación lineal más general de la forma $Dx + By\ c^2$, donde $x= A$ e $y= E$ corresponde a la recta MI con $MZ = \frac{c^2}{D-A}$. Fermat enuncia que todas las ecuaciones de primer grado representan líneas rectas. Se resalta que los coeficientes *literales*, así como las coordenadas son positivos, tendencia que persistió a lo largo de todo el siglo. Afirma que todos los problemas de lugares que incluyen una recta pueden ser descritos por esta ecuación lineal.

Anotaciones epistemológicas

Es una genialidad de Fermat dar al uso de las coordenadas la forma más simple posible, e igualmente poner en evidencia la naturaleza auxiliar y metódica de estas coordenadas, aplicándolas a ciertas clases de superficies que no se podían confundir con su representación geométrica, tal como el calor, lo que había presentado en el siglo XIV, Nicolas Oresme.

Así mismo, al retomar de la Aritmética de Diofante de Alejandría algunos trazos esenciales del simbolismo operatorio, las abreviaciones utilizadas para la designación de las incógnitas y de sus potencias, la puesta en ecuación de la relación entre esta incógnita y las cantidades determinadas del problema, la independencia de las representaciones geométricas y el empleo sistemático de lo que se llamará la regla de *falsa posición*[33], Fermat sugiere la idea de una ciencia que se constituye bajo una forma abstracta que lleva a soluciones generales.

33 El Método de Falsa Posición o Método de las Excedentes y Déficits es un método aritmético, en principio. Más recientemente, en Análisis Numérico, es un algoritmo de búsqueda de un Cero de una función, que combina las posibilidades del Método de Dicotomía y del Método de la Secante. El método

Queda un paso decisivo para consolidar la Geometría Analítica: quitar la restricción que se imponía a los procedimientos operativos debido a la necesidad de la aplicación numérica, a lo que se llega gracias al uso de los *signos literarios* para designar las nociones indeterminadas sobre las cuales soporta el razonamiento. Así, desde Viète, la Aritmética es un método operativo sobre los números: *Logística numerosa* y el Álgebra es un método operativo sobre las especies o formas de las cosas: *Logística especiosa*[34] (Brunschvicg, 1972, p. 104).

Vemos que Oresme y Viète aportaron los materiales a la ciencia nueva a un tal grado de perfección que su advenimiento se hizo necesario. De manera que, Fermat en su obra *Isagoge*, al retomar las nociones de sus predecesores, restablece y demuestra los dos libros de Apolonio de Pérgamo sobre los espacios planos, pero no disponía en este momento de un método que le hubiera dado el

permite regular los problemas lineales a una incógnita. Para esto, se parte de una solución supuesta y luego se evalúa su resultado. Al suponer la proporcionalidad, una regla de tres presenta la solución verdadera. Desde la antigüedad hasta el siglo XVII, su eficiencia permitió regular los problemas lineales sin recurrir al Álgebra. Se encuentra este método especialmente en Fibonacci, Luca Pacioli, Nicolas Chuquet, sin embargo fue explícitamente usado en Egipto, Babilonia, Grecia, India, el mundo árabe y luego en Occidente.
Por ejemplo: A, B y C compartieron una cierta suma de dinero. A recibió un tercio, B un cuarto, y C recibió \$1760 pesos. ¿Cuál era la suma?
Supongamos una suma de $3 \times 4 = 12$ pesos. A hubiera recibido $\frac{12}{3} = 4$ pesos; B hubiera recibido $\frac{12}{4} = 3$ pesos. Pero se sabe que C ha recibido \$1760 pesos. La suma era entonces $12 \times (\frac{1760}{5}) = 4224$ pesos. En donde: $\frac{4224}{3} = 1408$ para A, $\frac{4224}{4} = 1056$ para B, $4224 - 1408 - 1056 = 1760$, para C).
Este método permite resolver una ecuación lineal a una incógnita.

34 En la lógica formal, la lógica de especies tenía un uso pasivo e inerte, porque las cosas significaban individuos o substancias y éstas poseían propiamente cualidades que no podían pasar a los signos para representarlos. En la *Logistica speciosa* el uso se vuelve dinámico y fecundo, en donde las letras expresan cantidades cuya naturaleza consiste en combinarse, siguiendo las leyes de la Matemática. Así, todos los procedimientos debidos a los algebristas del medio evo y del siglo XVI, recopilados y presentados por Viète, vienen a ordenarse bajo las leyes de la *Logistica speciosa*.

medio de volver más claras las construcciones de estos espacios geométricos. Su Geometría Analítica le sirvió sobre todo para perfeccionar la teoría de las secciones cónicas hasta que el progreso de las investigaciones infinitesimales permitió trasladar sobre un nuevo terreno, el principio de la correspondencia entre las curvas y las ecuaciones y ampliar así su fecundidad.

4.2.2. René Descartes[35]

Descartes en su obra de 1637, la *Geometría*, propone resolver los problemas de Geometría por medio del recurso sistemático del cálculo algebraico. Su objetivo general es traducir los problemas geométricos en ecuaciones y resolver estas ecuaciones, que son problemas algebraicos, por medio de algunos procedimientos estándares para construir su solución, es decir sus raíces reales, que serían las

35 René Descartes nace en La Haye, Francia, 1596 y muere en Estocolmo, Suecia, 1650. Filósofo, físico y matemático. Después del esplendor de la antigua filosofía griega y del apogeo y crisis de la escolástica en la Europa medieval, los nuevos aires del Renacimiento y la revolución científica que lo acompañó darían lugar, en el siglo XVII, a una *Filosofía Moderna*, en la que Descartes se convierte en uno de sus fundadores, con su *racionalismo*. Se propone hacer *tabla rasa* de la tradición y construir un nuevo edificio sobre la base de la razón y la metodología de las Matemáticas. Su «duda metódica» no cuestionó a Dios, sino todo lo contrario; sin embargo, al igual que Galileo, sufrió la persecución a causa de sus ideas. Se une al sistema cosmológico copernicano y presenta sus ideas nuevas sobre el hombre y el mundo en sus pensamientos metafísicos, ideas que revolucionaron la Filosofía y la Teología.
El formula en latín el *cogito* –«Yo pienso luego existo»– funda así el sistema de ciencias sobre el sujeto conocedor del mundo que él se representa y marca la génesis de la subjetividad moderna. En física aporta una contribución a la Óptica y es considerado como uno de los fundadores del mecanicismo. En Matemáticas está en el origen de la Geometría Analítica. Su método científico, expuesto a partir de 1628 en las *Reglas para la Dirección del Espíritu*, y luego en *El Discurso del Método* en 1637 afirma una ruptura con respecto a la escolástica enseñada en la universidad y comienza con la cita: "el buen sentido es la cosa del mundo mejor compartida". Método caracterizado por su simplicidad inspirado en el método matemático y pretende remplazar la silogística aristotélica.

coordenadas de los puntos de intersección de curvas planas apropiadas, de grado más bajo posible[36]. En su desarrollo se pueden ver varias características:

- La formalización de las coordenadas cartesianas, donde el asocia a un punto dos números, el número x que mide la distancia con relación a una recta y el número y que mide la distancia que se aplica por orden a esta recta (ordenada). Estas rectas evocan un sistema de ejes de coordenadas, que se llamará luego el plano cartesiano. Las coordenadas son magnitudes en el sentido de Euclides (segmentos) y no de números.

  Descartes resuelve el problema de Pappus[37], al utilizar esa nueva técnica del plano cartesiano o de coordenadas; así un lugar (curva, por ejemplo) se representa por dos incógnitas, lo que hace posible el estudio de las propiedades de una curva a partir de su ecuación. La relación entre x y y permite a Descartes escribir la ecuación de curvas clásicas como las cónicas, los ovales y de las curvas de tercero y cuarto grado.

La influencia de Descartes será determinante sobre todo su siglo: los grandes filósofos que le sucedieron desarrollaron su propia filosofía con respecto a la suya, sea desarrollándola como Arnauld, Malebranche, sea oponiéndose como en Hobbes, Pascal, Spinoza o Leibniz.

36 En el mismo período de los estudios de Descartes, se encuentran los trabajos de Girard de Desargues (1639) sobre las bases de la Geometría Proyectiva la cual pretende expandir ciertos conceptos de la Teoría de las Cónicas en provecho de artistas, ingenieros, etc. En el libro de Geometría de Descartes se ve un conflicto de ideas entre Desargues y Descartes, aunque están ambos en la búsqueda de un método general capaz de unificar y simplificar los métodos matemáticos, no están de acuerdo con los métodos que se deben emplear; Desargues cree en la potencia de la Geometría, Descartes no tiene fe sino en la virtud del Algebra.

37 Se consideran cuatro rectas d_1, d_2, d_3 y d_4, y cuatro ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4. Sea p un punto del Plano. Anotemos e_i $(i = 1,2,3,4)$ la distancia de p a la recta d_i medida según el ángulo α_i. El problema consiste en determinar el lugar de los puntos p tales que $e_1 \cdot e_2 = e_3 \cdot e_4$. Descartes da la ecuación de este lugar y demuestra que se trata de una cónica. El problema se puede generalizar a un número cualquiera de rectas.

- Anotación simbólica: Bajo los trabajos de Viète, en general, él trata de representar magnitudes conocidas y no-conocidas por medio de letras y de encontrar tantas relaciones entre magnitudes conocidas y no conocidas. Así, en sus anotaciones, utiliza las letras del alfabeto latino para designar magnitudes medibles; y contrario a Fermat, las constantes son continuamente anotadas: *a, b, c, d, ...* y las variables *x, y, z*. Se opone de esta manera a la tradición de la época.

- Definición de curvas: Distingue las curvas geométricas y las curvas mecánicas, pero se va a restringir a las curvas geométricas, aquellas donde las dos coordenadas x y y se relacionan por una ecuación algebraica $P(x, y) = 0$ (lo que se llama hoy curvas algebraicas[38]). Descartes, así, rompe con la antigua clasificación de las curvas que se constituía en curvas planas (aquellas que se pueden construir a la ayuda de la regla y el compás), curvas sólidas (secciones cónicas) y curvas lineales (todas las otras como la concoide, la espiral, la cuadrática, etc.). De manera que, las curvas no-geométricas no son susceptibles de ser tratadas por los métodos analíticos de Descartes, no sabe estudiarlos sistemáticamente, no forman parte de la Geometría y las restringe también de su aplicación en la noción de Función.

- Método Analítico: que por su aplicación, conduce a la realización de sistemas de ecuaciones y de este a una sola ecuación. Estas manipulaciones, sin embargo, se limitan a ecuaciones algebraicas, que va a clasificar por grado, y serán aplicadas a las curvas geométricas. En su Geometría, nos explica su método, para la construcción de las ecuaciones (citado por Dahan-Dalmedico, A. / Peiffer, J., 1986, p. 135)

38 Una curva algebraica de orden n es una curva cuya ecuación puede llevarse, por operaciones racionales, a un polinomio de grado $n = 0$. Así, la curva $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ es algebraica de segundo orden, porque su ecuación se lleva, por elevaciones al cuadrado a $4xy - (1- x - y)^2 = 0$.

"Así, queriendo resolver algún problema, se debe considerar primero como realizado con anterioridad, y darle nombres a todas las líneas que sean necesarias para construir la solución, lo mismo que a aquellas que no son conocidas. Luego, sin considerar ninguna diferencia entre esas líneas conocidas y las no conocidas, se debe mirar la dificultad según el orden que muestra el más natural de todos, que de alguna manera dependen mutualmente los unos de los otros, hasta que se haya encontrado la manera de explicar una misma cantidad en dos formas: lo que se llama una ecuación; porque los términos de una de estas maneras son iguales a aquellos de la otra. Y se debe encontrar tantas ecuaciones que se han supuesto de líneas que no se conocían"[39].

Aquí, Descartes expone claramente la idea que una ecuación entre x y y es una forma de introducir una relación de dependencia funcional entre cantidades variables, en el sentido que una de ellas permite determinar la otra[40].

El imperativo de obtener una longitud a la ayuda de otra por un número finito de operaciones algebraicas está ligado a una teoría de las proporciones exactas de Descartes, ella misma dependiente de la Metafísica. Se ve aquí, la influencia del Libro V de Euclides y la importancia del pensamiento griego. En

39 La idea de ecuación de una curva, aparece más claramente en Fermat, que la ha descubierto hacia 1629, independientemente de Descartes, pero no la publica sino hasta 1679 en su obra *Isagoge*.

40 Dahan-Dalmedico, A. / Peiffer, J., 1986, p. 215, llaman la atención sobre este punto, con la cita de J. Vuillemin: "es funcional [para Descartes] una relación que permita hacer corresponder a una longitud dada otra longitud deducida de la primera por un número finito de operaciones algebraicas. Solo, tal relación, es susceptible para Descartes, de una construcción a través de la cual se atenderá todos los puntos de la curva, sin excluir ninguna. Esta posibilidad asegurará el encadenamiento y la continuidad intuitiva de la curva, sin que se tenga necesidad de hacer intervenir consideraciones infinitas".

general las curvas transcendentes se escapan a esta determinación exacta, y la relación que une las coordenadas de los puntos de estas curvas, no fue pensado por Descartes, como de tipo funcional. Sin embargo, solicitado y estimulado por los desafíos de sus adversarios (Fermat, Roberval, Florimond de Beaune, etc.), Descartes inventa procedimientos nuevos para las curvas transcendentes, excluidas de la *Geometría*.

La introducción de la funcionalidad por intermedio de las ecuaciones, constituye una etapa muy importante en el desarrollo de las Matemáticas. Este método de representación de las funciones debía quitar su campo de origen de la Geometría Analítica, para ser extendidas a otras ramas de las Matemáticas, y sobre todo en el campo del Análisis Infinitesimal.

Libro de la Geometría:

La *Geometría* es uno de los tres apéndices publicados en 1637 con el *Discurso del Método*, donde el presentaba una Ciencia Nueva que permitía obtener ideas claras sobre cualquier tema. La Geometría y los otros dos tratados, la Dióptrica (Óptica) y los Meteoros (Fenómenos Naturales), dan ejemplos del éxito obtenido siguiendo el Método.

La Geometría se divide en tres libros:

- I: Los problemas que se pueden construir empleando solo círculos y líneas rectas.

- II: De la naturaleza de las líneas curvas.

- III: De la construcción de los problemas sólidos o más que sólidos.

En 1649 Frans van Schooten (1615-1660), un matemático holandés, publica la primera versión en latín de la Geometría porque en su origen fue escrita en francés. Sus comentarios hacen llegar esta obra a una gran cantidad de matemáticos. La versión en latín incluye las Notas Breves de Florimond de Beaune, la primera introducción importante de la Geometría.

Anotaciones históricas

Para que la síntesis entre el Álgebra y la Geometría se hubiera podido realizar al principio del siglo XVII, fue necesario un diálogo entre el Álgebra y la Geometría. Pero este dialogo no se dio sino en el momento donde estos dos dominios adquirieron madurez comparables. Así, en el siglo XVI, el Álgebra no se había desarrollado completamente, mientras que la Geometría ya había alcanzado su madurez. Entonces, hay dos preguntas: cuál fue el desarrollo de la geometría y cuál fue el desarrollo del álgebra?

Para la Geometría, su puesta en desarrollo no tomó sino cuatro siglos y se presentó como la obra de los Antiguos griegos, de Thales a Arquímedes y Apolonio (200 a. C., con el estudio de las cónicas). Desde entonces, la humanidad dispone de un edificio de conocimiento, donde los Árabes fueron los herederos, luego la Europa Occidental hasta Descartes y Fermat.

Para el Algebra, su puesta en desarrollo tomó mucho más tiempo, alrededor de 1600 años. Fueron los Hindúes que dieron el empuje de inicio, del I al VII siglo y luego los Árabes que la desarrollaron, desde el siglo IX hasta el XIII. El conjunto de los conocimientos fue transmitido a Europa Occidental, pero tocó esperar la intervención de los algebristas italianos del siglo XVI (Tartaglia, Cardan, Bombelli) para llegar a las fórmulas de resolución de las ecuaciones de 3º y 4º grado. El francés Francois Viète (1540-1603) introduce la escritura simbólica designando los datos numéricos de los problemas por consonantes y las incógnitas por vocales (Descartes recurrió a: x, y, z, que se usan hoy todavía). Se ve que el álgebra se desarrolla por estratos sucesivos, para llegar a un límite en el siglo XVII.

En este momento, la fecundación se vuelve posible y es Descartes y Pierre Fermat que dan el nacimiento a la Geometría Analítica. (Emery, 1996, p.80 - 83).

Anotaciones epistemológicas

Con la presentación de los estudios de Fermat y Descartes se ve una simultaneidad en sus descubrimientos, que muestran una cercanía por su contenido técnico, pero una diferencia al considerar la orientación de los inventores. Así, la Geometría de Descartes es la obra de un metódico que procede a partir de una concepción universal de la ciencia y que deja el legado de la noción original de la verdad científica. Por el contrario, la *Isagoge* de Fermat es la obra de un técnico, que es al mismo tiempo un erudito, y que retoma y profundiza los procedimientos prácticos existentes para llevarlos a un punto de claridad y simplicidad. Así, hay una cierta complementariedad, de manera que, la génesis de la Geometría Analítica de Fermat aclara la filosofía matemática de Descartes y por lo tanto sus planteamientos de la Geometría Analítica. Igualmente, estos dos matemáticos contribuyen a una evolución en Matemáticas, por la unificación del dominio geométrico y numérico y el complemento dado al formalismo simbólico emprendido por Viète en su Álgebra Nueva; al introducir un carácter operatorio en el cálculo sobre las magnitudes geométricas, participan al surgimiento de la idea que, el número puede ser otra cosa que un entero, contribuyendo al análisis moderno y al cálculo diferencial e integral. Así mismo, contribuyen a la estructuración de la Matemática, en general con la idea de la Matemática Universal, que es más un desarrollo de Descartes definida a partir de su Método Filosófico.

La Idea de Matemática Universal

El telón de fondo de esta nueva Geometría, es la noción de una Lógica Verdadera (la cuarta de las *Regulae ad directione mingenii*: *Reglas para la Dirección del Espíritu* y la segunda parte del *Discours de la Méthode: Discurso del Método*, citados por Brunshvicg, 1972,

p. 105-126). Esta Lógica tiene como modelo dos disciplinas: la Aritmética de Pitágoras y la Geometría de Euclides y su forma superior dada por Apolonio, Viète, Pappus y Diofante. Así, esta nueva Geometría con base en el análisis que estos geómetras antiguos habían practicado y en un cierto género de Aritmética llamado Algebra, que permite operar sobre los números como los antiguos hacían sobre las figuras. Pero el análisis de los antiguos y el Álgebra de los modernos habían sacrificado la abundancia de los resultados a la simplicidad y la pureza de los principios; por lo cual la Matemática, en general incluyendo la nueva Geometría, debía reorganizarse y constituirse en un método más universal. El principio de este método consiste en elevarse por encima de la representación de las figuras y despejar lo que es común a todas las ciencias particulares que se llaman Matemáticas.

En tal concepción, la Geometría conserva su función de examinar las proporciones, concordancias o puntos en común, para lo cual es necesario suponer los sujetos, es decir los términos particulares destinados a ser el soporte de las relaciones generales, en ese sentido las *líneas* son los elementos más simples. Estas relaciones que se agregan a los términos para comprenderlos, no están sujetas a la naturaleza geométrica de las líneas sino son un tipo de *cifras*. Para esto, Descartes retoma lo mejor del Análisis Geométrico y del Álgebra, en el *Discurso del Método*, que en cierta manera se asemeja a la *Isagoge* de Fermat, se ve la génesis de la Matemática Universal (*Mathesis Universalis*) , cuyo fin es una reforma de la Matemática misma y en donde la noción de espacio, juega un papel importante.

Así, las figuras espaciales aparecen como un tipo de *cualidades*, que serían llevadas a las formas puramente abstractas e intelectuales de cantidad, en grados correspondientes al sistema de ecuaciones.

Descartes, con el objetivo de fundar la Matemática Universal, propone su Método (*Discurso del Método*, 1637), en donde la base es indicar la comprensión de lo complejo a partir de lo simple, por medio de un orden que permitirá descubrir los objetos (Boulad

Ayoub, J. - Vern, P. M., 2006, p. 25-34). Este orden se compone de dos momentos complementarios:

- reducir la complejidad por medio del *análisis* (para ver lo simple), de ahí dividir la complejidad en tantos elementos permitidos y necesarios para resolverla (Descartes: *Discours de la Méthode*, 1983. p. 100).

- complementar el análisis por medio de la *síntesis* para llegar a la solución y al descubrimiento de los objetos de conocimiento (Regulae o *Regles pour la direction de l'esprit*: XIII y XIV).

La idea fundamental es que la ciencia es esencialmente unidad, porque es la inteligencia humana misma y no hay sino una forma de comprender. El método es único para disponer los datos complejos de un problema según un orden inteligible, de manera que se presente un solo encadenamiento de relaciones simples entre elementos simples.

Para la constitución del orden, Descartes recomienda la simplicidad de las imágenes espaciales, la solución del problema es perfecta cuando la serie tiene un orden, es decir cuando se puede, como en el caso de una progresión geométrica, pasar de un elemento al otro gracias a un movimiento continuo e ininterrumpido del espíritu. Lo cual se funda sobre una relación inicial que puede ser tomada por la intuición, como una sola e indivisible, partiendo de lo simple o absoluto (Gontier, T, 1999, p. 51). Para Descartes, la Matemática es la ciencia del orden como de la ciencia de la medida, en las *Regulae* (Reglas) plantea el caso en donde la representación geométrica no es sino un esquema convencional, no tendría, entonces, sino un valor metodológico.

Así, un dato cualitativo se puede ver clara y distintamente al hacer corresponderle gráficas, siguiendo el método de Nicolas Oresme (medición del calor, por ejemplo). De esta manera, el pensamiento de Descartes gira alrededor de la dimensión espacial, cuyo elemento es la longitud, a partir de la cual se puede reconstituir la realidad espacial, como multiplicidad de varias dimensiones; todo elemento análogo a la longitud puede ser considerado como una dimensión, y se introducirá, en un problema, tantas dimensiones como sean necesarias. Así, la representación espacial de la dimensión no depende de la naturaleza espacial de lo medido, de manera que la longitud, lo largo y la profundidad son dimensiones, pero el peso es la dimensión por la cual se pesan las cosas; la velocidad es la dimensión del movimiento y así para una infinidad de dimensiones semejantes: todo modo de división en partes iguales constituye una dimensión según la cual se hace la enumeración.

Esta generalización de la noción de dimensión es uno de los puntos capitales en el planteamiento del Método, en donde el estudio de todos los fenómenos puede ser reducido a medidas de dimensiones, que se haría por medio del movimiento, que hace que los cuerpos pasen de un lugar a otro y ocupen el espacio, que es la base de la Geometría. La materia se define, entonces, por aquello que es extensible por medio de dimensiones.

Estamos entonces, en presencia del análisis o de la simplificación que lleva a la Física deductiva y mecanicista de Descartes. En donde, de los objetos pasamos a las magnitudes medibles, de los movimientos pasamos al movimiento local, del movimiento local y de las magnitudes medibles se pasa a lo extensible a dimensiones. Una nueva simplificación interviene, toda longitud tiene por ella misma algo de concreto y sensible, lo que puede ser llevado a números. Los números en su ordenamiento simbolizan toda esta reducción, no se puede quedar en los números aritméticos, muy restringidos y hay que pensar en el número algebraico. En la medida que se pueda expresar toda magnitud por una cantidad algebraica y en consecuencia, las relaciones entre magnitudes por las relaciones entre magnitudes algebraicas, se llega al objetivo de la simplificación.

Esta comparación lleva a igualdades lo que significa que la ciencia en lo que tiene de más general y de más fecundo, es una algebraización de todos los problemas que sean. Es esto lo que Descartes entiende por análisis, pero es también la Geometría Analítica, que es el modelo palpable de la *Mathesis Universalis*, del método y del análisis ordenado. Una vez analizados los problemas, la solución-síntesis se ofrece muy simplemente con las observaciones del orden implicado en el análisis y en los preceptos ya dados, revisión, enumeración, etc.

El método cartesiano y su resultado la *Mathesis Universalis*, permite sobre todo la transformación de las Matemáticas en el sentido del Álgebra, es decir a su generalización. Permite, de esta manera, la Física matematizada: pasar a magnitudes espaciales, a magnitudes locales y llegar siempre a funciones de orden algebraico.

La Matemática Universal es una extensión de los métodos geométricos analíticos a la universalidad de los problemas de la mecánica, de la física, de la biología o de la psico-fisiología y que se acompaña naturalmente de un esfuerzo de la imaginación.

Desde el punto de vista técnico de la unión del Álgebra y la Geometría, se tienen dos prácticas diferentes. Se puede servir de las propiedades geométricas de las curvas y, por ejemplo construir las raíces comunes de las ecuaciones determinando los puntos de intersección de las curvas correspondientes. O partir de las ecuaciones de las curvas y, por ejemplo, obtener sus puntos de intersección por el cálculo de sus raíces comunes. En un caso, se hace Álgebra con la ayuda de la Geometría, en el otro caso se hace Geometría con la ayuda del Álgebra.

Pero estas dos formas cesan de ser equivalentes si el objetivo es despejar de la Geometría Analítica una concepción teórica. La resolución de las ecuaciones algebraicas a la ayuda de construcciones geométricas es un procedimiento de inducción que va más allá de las causas por efectos; la doctrina que porta directamente sobre la constitución de las ecuaciones algebraicas, satisface las exigencias del método analítico.

En su forma inicial, la Matemática Universal tenía por objeto la extensión de la Geometría al Universo; el elemento era la dimensión espacial, que servía de modelo a cualquier medida y a toda combinación de los elementos del mundo físico. La Geometría da a la Matemática la resolución intelectual de la dimensión espacial, es un apoyo exterior para una concepción cuyo valor esencial es independiente de toda representación imaginativa. Desde aquí, la idea de la Ciencia Matemática se transforma: la cantidad es como en Euclides, una determinación sacada por abstracción de la observación de los objetos; la ciencia de la cantidad no es comparable a una ciencia natural, en donde la noción de cantidad es puramente intelectual y se establece *a priori* por la sola capacidad que tiene el espíritu de conducir y de seguir al infinito los largos encadenamientos de la razón.

Esta concepción nueva de la Matemática y de la Geometría lleva a una nueva concepción de la Filosofía.

5. Conclusiones

En este volumen I, hemos presentado los elementos de base de los *objetos geométricos*, siguiendo un desarrollo histórico, epistemológico y filosófico. Es así que en la *época clásica*, los babilonios y egipcios con el cálculo de superficies y de volúmenes simples plantean una regla que indica el perímetro del círculo, muy similar al número π posteriormente formalizado y calculan correctamente las áreas rectilíneas como el cuadrado, rectángulo, triángulo y trapecio e igualmente los volúmenes del cubo, prisma y cilindro. Con estas formas geométricas, sus áreas y ciertas reglas para su cálculo, se tiene la base epistemológica de estos objetos geométricos, sobre los cuales se plantean las propiedades elementales de la *similitud* en una *teoría de proporciones* primaria. Así mismo, los griegos jónicos atribuyen propiedades para la división del círculo, por medio del diámetro y de la intersección de un triángulo produciendo triángulos semejantes. Los Pitagóricos identifican los números a conjuntos de puntos dispuestos en configuraciones geométricas cuyas propiedades son legibles directamente de éstas; además toda dimensión continua (línea, superficie o cuerpo) podía ser identificada a un *número* (área, volumen o longitud), tentativa de identificar lo *continuo* por lo *discreto*. Platón al presentar la *Teoría de dos mundos*, el accesible por los sentidos y el accesible por el pensamiento, los *objetos matemáticos* son accesibles por el pensamiento y sus modelos son inmutables, permanentes y universales; con estos planteamientos se da un salto en el conocimiento de los objetos, proporcionándoles un estatuto a la generalidad de objetos matemáticos y particularmente a los geométricos, como objetos tendientes a la abstracción. Igualmente, de un lado, Platón le da un estatuto al *universo* como forma esférica provisto de un movimiento de rotación sobre sí mismo y de otro lado, los cuerpos en general, tienen un principio de *composicionalidad, en los* triángulos infinitamente pequeños y los cuerpos compuestos en las combinaciones de triángulos que a su vez producen cuadrados, pentágonos o triángulos más grandes. En este sentido, la geometría griega, integra los conocimientos de babilonios y egipcios, pero rompe con su pragmatismo y se constituye como ciencia autónoma liberada de cualquier mítica y adquiere las bases conceptuales que requiere una ciencia más rigurosa.

En consecuencia, los *Elementos de Geometría* de Euclides, resultan de la estructuración sistematizada de los trabajos griegos anteriores, donde recopila gran parte del saber matemático de su época (geometría plana, razones y proporciones y geometría de los cuerpos sólidos), son la piedra angular de una ciencia abstracta y deductiva, y trazan el camino posterior del pensamiento moderno.

El desarrollo en ese pensamiento se encuentra en la innovación de Apolonio con el planteamiento de la generalización de los tres casos de las cónicas y sus características, engendrando éstas a partir de la intersección de un mismo cono oblicuo con base circular, por un plano de corte que puede variar su dirección. Las cónicas son expresadas en ecuaciones, por medio de un sistema de coordenadas naciente, teniendo como ejes un diámetro de la curva y la tangente a una de las extremidades del diámetro, anticipándose a la presentación de la Geometría Analítica.

La idea de la *perspectiva* de los pintores del Renacimiento es la de la *proyección*, que es de interés de los cartógrafos, por los descubrimientos geográficos del siglo XV. La integración de métodos proyectivos en el cuerpo de las matemáticas enriquecerá la Geometría de las Cónicas y unificará las técnicas geométricas.

La *Geometría Analítica*, presenta un método de análisis y síntesis, en donde se plantean la expresión de una realidad geométrica por una relación entre cantidades variables en ecuaciones, el uso de coordenadas y el principio de la representación gráfica, en donde se advierte una relación entre la Geometría y el Álgebra. La posterior evolución de esta geometría advierte una gran algebraización de esta y su correspondiente formalización.

La constitución y la evolución de los *Objetos Geométricos* sugieren una preponderancia importante no solamente por este desarrollo presentado como construcción de una ciencia, sino también porque ellos se proyectan sobre problemas filosóficos y ontológicos como lo atestiguan los planteamientos de los matemáticos de finales del siglo XIX, cuyo representante principal lo tenemos en los *Fundamentos de la Geometría* de David Hilbert. Se ve que desde Euclides la metodología de la Geometría se presenta como una *Axiomática*, lo cual representa una *paradoja* entre lo *inteligible* y lo *sensible* porque como se ha visto la Geometría se nutre de lo experimental-sensible y no podría ser totalmente inteligible, de manera que la pregunta se traslada a saber de qué lado se sitúa esta ciencia? Se sabe que la intervención manifiesta de la *intuición espacial* no deja reducir su contenido a un sistema de proposiciones pero su *verdad* impediría referirla solamente a las simples contingencias de la experiencia. Sin embargo, es la *Axiomática* que lleva a resolver la paradoja de manera diferente: si la geometría clásica parecía a la vez formal e intuitiva, es porque ella reunía en una ciencia aparentemente única dos disciplinas distintas, que actualmente están disociadas: en una geometría *pura, formal*, representada por la teoría axiomática, donde el sentido intuitivo de los términos y de las proposiciones se dejan de lado deliberadamente y cuya verdad se mide por la coherencia lógica, sin ningún llamado a la experiencia; y en una geometría *aplicada*, intuitiva, donde la forma demostrativa no es sino un accesorio y en donde los teoremas son en realidad, *leyes físicas*. La segunda ayudó a construir la primera, pero ésta se volvió independiente y si hace referencia a la segunda es como si se tratara de uno de sus modelos posibles. Lo cual llevaría a otra pregunta: ¿cómo solamente con la razón se pueden conocer las propiedades de lo real? Los matemáticos lo han resuelto haciendo una clara separación de lo intuitivo y lo lógico, así, según la Axiomática, solo los hechos lógicos y formales forman el objeto de la ciencia matemática, en general, pero no el elemento intuitivo que puede, en algunos casos, agregársele. (Blanché, 1990, p. 98-100).

No obstante, se requiere interpretar correctamente esta doble forma de la Geometría, sabiendo que existen diversos grados de abstracción y de racionalidad, que permite ordenarlas y que esto posibilita una lectura doble: la abstracta, racional y formal, o la concreta, empírica y material. De manera que, la Geometría así entendida, lejos de oponer lo sensible, intuitivo con lo inteligible y formal, se puede decir que esas fronteras se acercan con la lógica de un lado y lo real del otro, teniendo entre los dos, límites fluctuantes. Es entonces, dentro de estos límites que la enseñanza de la Geometría tiene contexto, aportando el interés de los estudiantes desde lo real para llevarlo a la formal-racional y por lo tanto a la apropiación de este saber geométrico.

Bibliografía

BLANCHE, Robert. *L'Axiomatique*. Paris, PUF, 1990.

BLANCHÉ, Robert et DUBUCS, Jacques : *La Logique et son histoire*, Paris, Armand Colin, 1996. (Collection «U», série Philosophie).

BOULAD AYOUB, Josiane. - VERN, Paule Monique. *La Révolution Cartésienne*. Levis, PUL Presses de l'Universitaire de Laval, 2006.

BRUNSCHVICG, L. *Les Étapes de la Philosophie Mathématique*. Nouveau Tirage augmenté d'une Préface de M. Jean-Toussaint Desanti. Paris, Librairie scientifique et technique A. Blanchard, 1972.

DAHAN - DALMEDICO, Amy; PEIFER, Jeanne: *Une histoire des mathématiques: Routes et dédales*. Paris, Seuil, 1986.

DESCARTES: *Discours de la Méthode*, Paris, Editions Sociales, 1983.

DUHEM, Pierre. *Le système du monde. Histoire des doctrines cosmologiques de Platon a Copernic*. Paris, Hermann, 1913. Tome I.

EMERI, Eric. *L'Ecole pour la vie: ne dites jamais: je suis nul en Maths*. Lausanne, Eds. L'Age d'Homme, 1996.

Encyclopaedia Universalis. Corpus 17. Paris, Editeur a Paris, 2002.

GARDIES, Jean Louis. *Qu'est-ce que et pourquoi l'analyse: Essai de définition* (Problèmes & Controverses). Paris, Librairie Philosophique J. Vrin, 2001.

GODEAUX, Lucien. *Les Géométries.* Paris, Armand Colin, 3a. ed., 1947.

GONTIER, Thierry. *Descartes. L'arbre inverse.* Paris, Ellipses,1999. *Philo-philosophes.*

HILBERT, David. *Grundlagen der Geometric*. Leipzig, 1899. Traduction française : *Les Fondements de Géométrie*, LAUGEL, éd. critique de Paul Rossier, Paris, Dunond, 1971.

KUNZMANN, P. –BURKARD, F. P.- WIEDMANN, F. *Atlas de la Philosophie.* Torino, G. Canale & C. S. p. A., 1993.

LOI, Maurice. *Avant propos*. En: *Penser les Mathématiques. Séminaire de philosophie et mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure. J. Dieudonné, M. Loi, R. Thonm,* [et autres]. Textes préparés et annotés par François Guénard et Gilbert Lelievre. Paris, Editions Seuil, 1982.

PLATON. *La République.* Paris, Garnier-Frères, 1966.

WARUSFEL, André. *Les nombres et leurs mystères*. Paris, Ed. Seuil, 1961.